Wiederholung: Grundbegriffe: Elemente und Teilmengen, Cartesische Produkte und Abbildungen, Komposition von Abbildungen, Fasern, Partitionen, Äquivalenzrelationen, Rekursion und Induktion: Rechnen mit natürlichen Zahlen, Folgen, Konvergenz und Häufungspunkte

Wiederhole die obigen Themen: Wir stellen Fragen im Testat!

Verknüpfungen, Gruppen- und Körperaxiome

Definition von Verknüpfungen

Wir wollen Rechenoperationen axiomatisch behandeln. Zu diesem Zweck zuerst eine Definition:

MATH: Sei M eine Menge. Eine **Verknüpfung** auf M ist eine Abbildung

$$M \times M \rightarrow M.$$

In dem Falle, wo die Verknüpfung Addition heißen soll, bezeichnet man sie mit $+$, genauer:

$$+ : M \times M \rightarrow M : (a, b) \mapsto a + b$$

Insbesondere schreibt man $a + b$ statt $+(a, b)$.

```
> 3+5;
  `+`(3,5);
```

$$8$$

$$8 \quad (2.1.1)$$

BEACHTE: Die Bilder unter einer Verknüpfung müssen wieder in der Menge liegen. Hier ein Beispiel, wo das nicht so ist:

```
> M:={$1..10};
```

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (2.1.2)$$

```
> S:=NULL;
```

$$S := \quad (2.1.3)$$

```
> for i in M do
    for j in M do
      S:=S,i+j
    end do
  end do;
```

```
> {S};
  {S} subset M;
```

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$false \quad (2.1.4)$$

MATH: Hier lag also keine Addition auf M vor, da das Ergebnis der Summenbildung nicht notwendig wieder in M liegt. Hätten wir aber als Menge M die Menge aller natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ zugrunde gelegt, hätten wir sehr wohl eine Addition bekommen.

MAPLE: Der letzte Befehl war etwas umständlich. Hier ist eine elegantere Version:

```
> M:={$1..10};
> map(a->op(map(b->a+b,M)),M);
```

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} \quad (2.1.5)$$

MAPLE: Analyse des letzten Befehls: Wenn du einen solchen Befehl analysieren willst, musst du den Befehl genau wie MAPLE von innen nach außen lesen:

```
> map(b->1+b,M);
> op(map(b->1+b,M));
```

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \quad (2.1.6)$$

MAPLE: In Maple sind diverse Verknüpfungen definiert, die meistens mit + (für Addition) oder * (für Multiplikation) oder auch mit komplizierteren Namen belegt werden, je nachdem, welches die Menge ist, auf der die Verknüpfung definiert ist. Was diesen letzten Punkt angeht, ist Maple oft vage. So benutzt man + für fast alle Zahlbereiche, die Maple unterstützt, z. B. für natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen etc. Solange man exakt rechnet, ist alles unter Kontrolle.

MATH: Wir halten fest: Eine Verknüpfung

$$\bullet : M \times M \to M : (m, n) \mapsto m \bullet n$$

auf einer Menge M legt für jedes $m \in M$ eine Abbildung

$$\lambda(m) : M \to M : n \mapsto m \bullet n$$

fest. $\lambda(m)$ heißt auch die **Linksoperation** mit m bezüglich der Verknüpfung $\bullet$, oder **Linksmultiplikation**.

Assoziativgesetz und Kommutativgesetz

Wir wollen die formalen Regeln festhalten, gemäß derer man normalerweise rechnet, genauer addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Fangen wir mit dem Addieren an:

```
> (2+3)+5;
```

$$10 \quad (2.2.1)$$

```
> 2+(3+5);
```

$$10 \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

MATH: Ist $\cdot$ eine Verknüpfung auf M, so erfüllt diese Verknüpfung das **Assoziativgesetz,** wenn für $a, b, c \in M$ gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

```
> evalb((a+b)+c=a+(b+c));
```

$$true \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

```
> is((a+b)+c=a+(b+c));
```

$$true \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

MAPLE geht davon aus, dass das Assoziativgesetz der Addition $(+)$ für die Symbole a, b, c erfüllt ist.

```
> 2+3;
```

$$5 \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

```
> 3+2;
```

$$5 \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

MATH: Ist $\cdot$ eine Verknüpfung auf M, so erfüllt diese Verknüpfung das **Kommutativgesetz**, wenn für $a, b \in M$ gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

MATH: Unsere Anforderungen an die Addition: Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz sollen gelten:

```
> evalb((a+b)+c=a+(b+c));
```

$$true \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

```
> evalb(a+b=b+a);
```

$$true \qquad \textbf{(2.2.8)}$$

Dies wollen wir so verstehen: Für alle a, b, c aus unserer Menge M sollen die obigen beiden Gleichungen immer gelten. Solange wir mit konkreten Zahlen rechnen, sind diese Gesetze zwar immer erfüllt, aber ohne Wichtigkeit. Sie werden aber wichtig, wenn wir mit allgemeinen Ausdrücken operieren, die Namen für (noch) unbekannte konkrete Zahlen sind. Dann brauchen wir nämlich eine "Grammatik", sprich Regeln, um Manipulationen durchführen zu können.

MATH: Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gelten auch für die

Multiplikation ganzer Zahlen. Keineswegs gelten diese beiden Gesetze auch für die Subtraktion, die ja auch eine Verknüpfung auf der Menge der ganzen Zahlen ist:

```
> is((a-b)-c=a-(b-c));
```

$$false \tag{2.2.9}$$

```
> simplify((a-b)-c);
```

$$a-b-c \tag{2.2.10}$$

```
> simplify(a-(b-c));
```

$$a-b+c \tag{2.2.11}$$

MAPLE und **MATH**: Wenn keine Klammern stehen, die die Reihenfolge der Rechenschritte bestimmen, sollen die Ausdrücke von links nach rechts gelesen und abgearbeitet werden mit folgender Ausnahme: Kommen +,- und gleichzeitig *, / in einem Ausdruck vor, so werden zuerst die Operationen mit *, / ausgeführt.

HILFE **?+**

```
> a/b*c;
  a/(b*c);
```

$$\frac{a\,c}{b}$$

$$\frac{a}{b\,c} \tag{2.2.12}$$

ÜBUNG [01]:
1) Definiere die Rechtsmultiplikation $\varrho(m)$ in dem gerade diskutierten Zusammenhang. 2.) Zeige: $\cdot$ ist genau dann kommutativ, falls $\lambda(m) = \varrho(m)$ für alle $m \in M$ gilt. 3.) Zeige: $\cdot$ ist genau dann assoziativ, falls $\lambda(m) \circ \lambda(n) = \lambda(m \cdot n)$ für alle $m, n \in M$ gilt.

Definition von Gruppen

Wir wollen jetzt die präzisen Regeln aufstellen, die sich als grundlegend erwiesen haben, um bestimmte Rechnungen auszuführen, die in vielen sehr unterschiedlichen Situationen auftreten. Es ist ein Kennzeichen der Algebra, diese Regeln möglichst allgemein zu halten, sodass einerseits viele verschiedene Anwendungen möglich sind, aber andererseits doch noch eine Theorie bereitgestellt werden kann, die auch in den konkreten Anwendungen nicht ganz trivial ist. Wir fangen mit einer Verknüpfung an.

MATH: Eine **Gruppe** $(G,\cdot)$ ist eine nicht-leere Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot$ auf G, sodass folgende drei Axiome gelten:

1) $\cdot$ ist assoziativ:
$\forall\, a, b, c \in G: (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

2) Es existiert ein eindeutiges Element $1 \in G$ mit
$1\cdot g = g\cdot 1 = g$
für alle $g \in G$.
$\exists\, 1 \in G\ \forall\, g \in G: (1\cdot g = g\cdot 1 = g) \wedge ((1' \in G\ \forall\, g \in G: 1'\cdot g = g\cdot 1' = g) \Rightarrow 1' = 1)$

3) Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein eindeutiges Element $g^{-1} \in G$ mit
$g\cdot g^{-1} = g^{-1}\cdot g = 1$.
$\forall\, g \in G\ \exists\, g^{-1} \in G: (g\cdot g^{-1} = g^{-1}\cdot g = 1) \wedge ((h \in G: g\cdot h = h\cdot g = 1) \Rightarrow h = g^{-1})$

Zusatz:
Gilt das Kommutativgesetz für $\cdot$, so heißt die Gruppe kommutativ oder **abelsch**.

Bezeichnungen:
1 heißt **neutrales Element** oder **Einselement**, g^{-1} das zu g **inverse Element**.

Schreibt man die Verknüpfung als $+$ statt $\cdot$, so bezeichnet man das neutrale Element mit 0 und nennt es **Nullelement**, das zu g inverse Element mit $-g$ und nennt es das **negative Element** von g. In der Regel bezeichnet man die Verknüpfung nur bei abelschen Gruppen mit $+$.

freiwilliges PROJEKT [01]:

Wir wollen uns in Bescheidenheit üben und einsehen, dass wir auch mit schwächeren Forderungen auskommen.

Sei G eine nichtleere Menge mit einer Verknüpfung $\cdot: GxG \to G$ auf G, sodass folgende drei Axiome gelten:
1) $\cdot$ ist assoziativ:
$\forall\, a, b, c \in G: (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

2') Es existiert ein Element $\mathrm{e} \in G$ mit
$\mathrm{e}\cdot\mathrm{g} = \mathrm{g}$
für alle $g \in G$.
$(\exists\, \mathrm{e} \in G\ \forall\, g \in G: \mathrm{e}\cdot\mathrm{g} = g)$

3') Zu jedem Element $g \in G$ gibt es ein Element $h \in G$ mit $h\cdot g = e$.
$(\forall\, g \in G\ \exists\, \mathrm{h} \in \mathrm{G}: \mathrm{h}\cdot g = \mathrm{e})$

Zeige, dass $(G,\cdot)$ eine Gruppe ist. Gehe dabei wie folgt vor:

1. Zeige: Für alle $g \in G$ gilt: Ist h ein zu e linksinverses Element von g, so ist h auch ein zu e rechtsinverses Element von g.

$(\forall\ g \in G: (h \cdot g = e \Rightarrow g \cdot h = e))$
2. Zeige: Sei e ein linksneutrales Element von G. Dann ist e auch rechtsneutral.
$((e \cdot g = g\ \forall\ g \in G) \Rightarrow (g \cdot e = g\ \forall\ g \in G))$
3. Zeige: Das links(- und damit auch rechts-)neutrale Element ist eindeutig.
4. Zeige: Zu jedem Element $g \in G$ existiert ein eindeutiges links(- und damit auch rechts-)inverses Element.

Hinweis: Bei 1. kann es hilfreich sein, dass ein linksinverses Element nach 2') selbst wieder ein linksinverses Element besitzt.

Wir wollen Gruppen nun ein wenig besser verstehen.

BEISPIEL 1: Die ganzen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{Z}, +)$ bilden eine abelsche Gruppe:

```
> 0+a;
  a+0;
```

$$a$$
$$a \tag{2.3.1}$$

```
> a+(-a);
```

$$0 \tag{2.3.2}$$

BEISPIEL 2: Die rationalen Zahlen mit der Addition $(\mathbb{Q}, +)$ bilden eine abelsche Gruppe. Bei dieser Gruppe ist der Gleichheitsbegriff für die Elemente etwas problematisch:

```
> 6/4;
```

$$\frac{3}{2} \tag{2.3.3}$$

```
> (a*b)/(a*c);
```

$$\frac{b}{c} \tag{2.3.4}$$

Wir kommen später auf das Problem zurück, dass man sehr viele verschiedene Namen für dieselbe rationale Zahl hat. Aber wenn man den Bruch durchkürzt und auf einem positiven Nenner besteht, hat man eine Normalform. Jedoch ist das Addieren von Normalfomen nicht ganz so einfach. (Zwei Brüche werden addiert, indem man …)

```
> 3/4+2/9;
```

$$\frac{35}{36} \tag{2.3.5}$$

BEISPIEL 3: Die ganzen Zahlen mit der Multiplikation bilden keine Gruppe, haben aber die Eins als Einselement. Selbst wenn wir die Null aus der Menge entfernen, haben wir keine Gruppe, denn z. B. zu 3 haben wir kein inverses Element. Wenn wir hingegen die rationalen Zahlen ungleich Null mit der

Multiplikation betrachten $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, so bekommen wir sehr wohl eine Gruppe:

```
> (2/3)^(-1);
  3^(-1);
```

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \textbf{(2.3.6)}$$

BEISPIEL 4: Die Menge aller bijektiven Abbildungen $M \to M$ bildet eine Gruppe mit der Komposition als Multiplikation, für eine beliebige feste Menge M. Man nennt diese Gruppe die **symmetrische Gruppe** auf M.

ÜBUNG [02]:

1) Verifiziere von Hand die Gruppenaxiome für die symmetrische Gruppe auf M, wobei M eine beliebige nicht-leere Menge ist.
Hinweis: Auch wenn in der Aufzählung der Definition des Begriffes Gruppe nur 3 Punkte sind, so bleiben 4 Punkte zu zeigen.
2) Sind die symmetrischen Gruppen kommutativ?

Der Gruppenbegriff ist für sich von einem erheblichen Interesse, denn er beschreibt Symmetrien. Er wird euch daher später noch oft begegnen. Im Moment wollen wir ihn nur benutzen, um den Begriff des Körpers zu definieren, bei dem zwei Verknüpfungen vorliegen.

Definition von Ringen und Körpern

MATH: Ein **Ring** $(R,+,\cdot)$ mit Einselement ist eine nicht-leere Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, so dass gilt:
1) $(R,+)$ ist eine kommutative Gruppe, deren neutrales Element mit 0 bezeichnet wird.
2) $(R,\cdot)$ ist assoziativ mit einem neutralen Element 1.
3) Für den Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation gilt das Distributivgesetz:

$$\forall\ a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$\forall\ a, b, c \in K : (\mathrm{a} + \mathrm{b}) \cdot \mathrm{c} = a \cdot c + b \cdot c$$

(Die rechte Seite ist gemäß der Vereinbarung Punkt- vor Strichrechnung zu lesen.)

Wenn wir von einem Ring sprechen, meinen wir in der Regel einen Ring mit Einselement.

Ein Ring heißt **kommutativer Ring**, falls $(R, \cdot)$ kommutativ ist.

DENKANSTOSS: Zeige allgemein für Ringe, dass $0 \cdot 1 = 0$ gilt.

```
> 0*1;
```

$$0 \tag{2.4.1}$$

MATH: Ein kommutativer Ring $(K, +, \cdot)$ mit 1 heißt **Körper**, wenn zusätzlich gilt:
4) $1 \neq 0$ und
5) $(K - \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element 1.
(**DENKANSTOSS**: Damit ist 4) überflüssig.)

DENKANSTOSS: Sei R ein Ring mit $1 = 0$, dann ist $R = \{0\}$.

BEISPIEL: Dir sollten schon einige Beispiele bekannt sein: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden ein kommutativen Ring, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper. Mehr Beispiele folgen in den nächsten Wochen.

MATH: Wie bereits gesehen ist die Menge $\{1,.., n\}$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n mit der Addition natürlicher Zahlen als Verknüpfung nicht abgeschlossen. Man kann dies wie folgt "reparieren": Ersetze die Menge $\{1,..n\}$ durch $\{0,.., n-1\}$ und wähle stattdessen folgende Verknüpfung:

$$+ \mathbf{mod}\, n : \{0,..n-1\} \times \{0,.., n-1\} \rightarrow \{0,.., n-1\} : (a, b) \mapsto a + b \,\mathbf{mod}\, n$$

wobei $x \,\mathbf{mod}\, n$ den Rest von x bei Division durch n bezeichnet (vgl. Worksheet über Induktion).
Definiert man nun noch

$$\cdot \,\mathbf{mod}\, n : \{0,..n-1\} \times \{0,.., n-1\} \rightarrow \{0,.., n-1\} : (a, b) \mapsto \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \,\mathbf{mod}\, n$$

als zweite Verknüpfung, so erhält man einen Ring $(\{0,.., n-1\}, + \,\mathbf{mod}\, n, \cdot \,\mathbf{mod}\, n)$, welcher wir hier mit $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ bezeichnen wollen.

MATH: Sei M eine beliebige Menge und R ein Ring. Die Menge R^M aller Abbildungen von M nach R bildet einen Ring bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation: Seien $f, g \in R^M$, dann sind die Abbildungen $f + g$ und $f \cdot g$ definiert durch

$$f + g : M \rightarrow R : a \mapsto f(a) + g(a)$$
$$f \cdot g : M \rightarrow R : a \mapsto f(a) \cdot g(a)$$

Null- und Einselemente:
$$0 : M \rightarrow R : a \mapsto 0$$
$$1 : M \rightarrow R : a \mapsto 1$$

BEISPIEL: Die Folgen über $\mathbb{R}$ bilden einen kommutativen Ring. Aufgrund der Grenzwertsätze bilden auch die konvergenten Folgen über $\mathbb{R}$ einen Ring.

MAPLE kennt diese Verknüpfungen:

```
> (f+g)(a);
```

$$f(a) + g(a) \tag{2.4.2}$$

```
> (f*g)(a);
```

$$f(a)\, g(a) \tag{2.4.3}$$

MAPLE kennt auch das Null- und das Einselement:

```
> 0(a),(f+0)(a),(0+f)(a);
```

$$0, f(a), f(a) \tag{2.4.4}$$

```
> 1(a),(f*1)(a),(1*f)(a);
```

$$1, f(a), f(a) \tag{2.4.5}$$

Assoziativität von $+$ und $\cdot$, Kommutativität von $+$, sowie das Distributivgesetz folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von R. Ist R kommutativ, dann ist auch R^M kommutativ.

ÜBUNG [03]:

1) Begründe genauer: Warum ist R^M ein Ring, falls R ein Ring ist?
2) Sei K ein Körper und M eine beliebige Menge mit $|M| \geq 2$. Warum ist K^M kein Körper?
(Hinweis: Mache dir die Aussage zunächst an einem Beispiel einer endlichen Menge M mit $|M| = 2$ klar.)

Beispiele von Ringen und Körpern

ÜBUNG [04]:

1) Verifiziere mit Maple die Gruppenaxiome für $(\mathbb{Z}/10\,\mathbb{Z}, +\,\mathbf{mod}\,10)$.
2) Ist $(\mathbb{Z}/10\,\mathbb{Z}, +\,\mathbf{mod}\,10)$ kommutativ?
3) Erstelle mit Maple die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}/10\,\mathbb{Z}$ und folgere, dass die Multiplikation kommutativ ist.
4) Verifiziere die beiden Distributivgesetze mit Maple.
Hinweis: Nutze die Kommutativität.
5) Warum zeigt

```
> 5*4 mod 10;
```

$$0 \tag{2.5.1}$$

bereits, dass $\mathbb{Z}/10\,\mathbb{Z}$ kein Körper ist? Wie kann man dies an der Multiplikationstabelle ablesen?
Hinweis: Dies sind endliche Probleme. Benutze **map**. Rechne oft genug **mod 10**.

BEISPIEL: $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, +\,\mathbf{mod}\,100, \cdot\,\mathbf{mod}\,100)$ ist kein Körper, sondern nur ein kommutativer Ring:

```
> 5*40 mod 100;
```

$$0 \tag{2.5.2}$$

DENKANSTOSS: Warum reicht dies bereits als Beweis aus, dass $\mathbb{Z}/100\,\mathbb{Z}$ kein Körper ist?

BEISPIEL: $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}, +\,\mathbf{mod}\,2, \cdot\,\mathbf{mod}\,2)$ ist ein Körper, den wir kurz mit $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ bezeichnen.

DENKANSTOSS: Verifiziere die Körperaxiome für $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$.

ÜBUNG [05]:

1) Die folgende Verknüpfungstabellen kann man eindeutig ergänzen, so dass ein Körper $(\{a, b, c, d\}, +, \cdot)$ entsteht. Berechne diese Ergänzung und begründe dabei die Wahl aller Einträge.
(*Hinweis*: Du musst nicht mehr zeigen, dass das Ergebnis ein Körper ist.)
Hinweis: Notiere dir, in welcher Reihenfolge und warum du die Einträge ergänzt hast, damit du dies im Testat begründen kannst.

$+$	a	b	c	d
a		c		
b				
c				
d				

$\cdot$	a	b	c	d
a		c		
b				
c				
d				

2) Zeige, dass der obige Körper nicht $\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$ ist.

```
>
```

Cauchy-Folgen

Aufgaben: 3

```
> restart;
```

Cauchy-Folgen

Analog zur Konvergenz reellwertiger Folgen, kann man die Konvergenz für Folgen in $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definieren:
MATH: Eine Folge $a_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ heißt konvergent mit Grenzwert $g \in \mathbb{Q}$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ existiert ein $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_i - g| < \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > N_0$.
Folgen mit Grenzwert 0 nennt man auch hier **Nullfolgen**.

MATH: Es entsteht also die Frage, wie wir rationale Folgen, die in $\mathbb{R}$ konvergent sind, bereits im Kontext der rationalen Zahlen charakterisieren können. Die Antwort sind die rationalen **Cauchy-Folgen**:

Eine rationalwertige Folge $(a_i) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ heißt **Cauchy-Folge,** falls gilt:
Zu jedem $n > 0$ existiert ein $N_0 = N_0(n)$ mit

$$|a_i - a_j| < \frac{1}{n}$$

für alle $i, j > N_0$.

BEISPIEL: Sei

$$f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

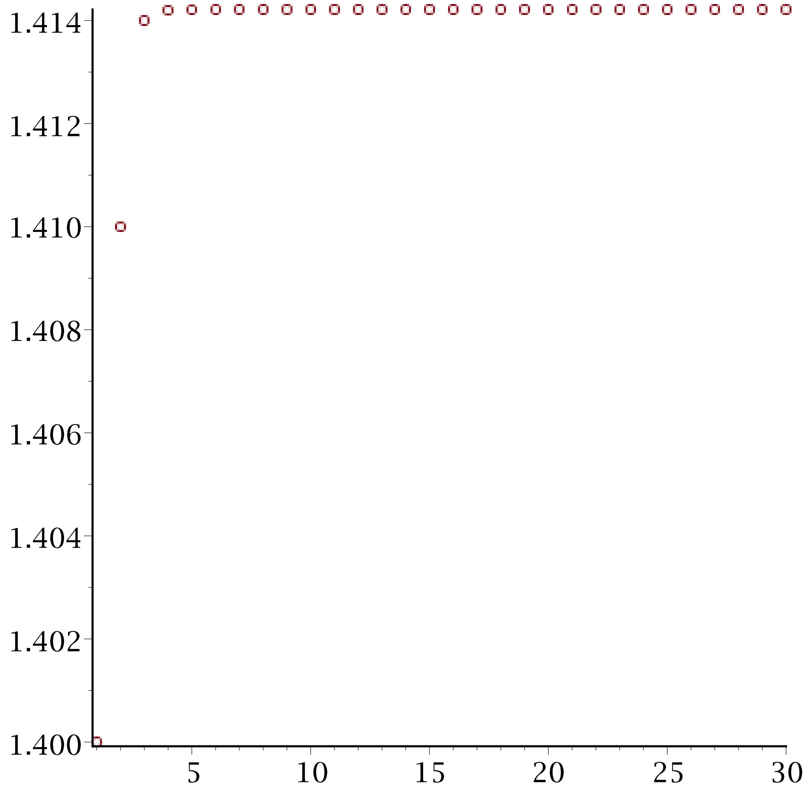
eine Folge und $a \in \mathbb{Z}$, dann ist

$$F(a) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : n \mapsto a + \sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{10^i}$$

eine rationale Cauchy-Folge. Diese Cauchy-Folgen nennen wir von Dezimalbruchtyp.

DENKANSTOSS: Zeige dies!

```
> plot(map(i->[i, floor(sqrt(2)*10^i)/10^i], [$1..30]), style=
  point, symbol=circle);
```



ÜBUNG [06]:

Zeige: Eine rationale Folge mit reellem Grenzwert ist rationale Cauchy-Folge.

Konstruktion von $\mathbb{R}$

Wir wollen nun die reellen Zahlen konstruieren und nutzen als ersten Ansatz dafür die Menge der rationalen Cauchy-Folgen:

$$\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q}) := \{ a_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid a_n \, \mathit{ist\ Cauchy-Folge} \}$$

Wir wollen sehen, dass diese Menge mit den folgenden Verknüpfungen, welche von der Ringstruktur der Folgen inspiriert sind, ebenfalls einen Ring bildet:

Seien $a, b \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$:

$a + b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : i \mapsto a_i + b_i$

$a \cdot b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : i \mapsto a_i \cdot b_i$

Befassen wir uns zuerst mit der Addition:
Seien $a, b \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ und sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$:
Dann gibt es, da beide Folgen Cauchy-Folgen sind, ein
$N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) := \max\left(N_{0,a}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_{0,b}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ mit der Eigenschaft:

$|a_i - a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_i - b_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $i, j > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Betrachte nun:

$|(a+b)_i - (a+b)_j| = |(a_i + b_i) - (a_j + b_j)| = |(a_i - a_j) + (b_i - b_j)| \leq |a_i - a_j| + |b_i - b_j| <$
$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Damit ist die Cauchy-Eigenschaft von $a + b$ gezeigt.

MATH: Cauchy-Folgen sind beschränkt:
Wegen $|a_i - a_j| < \frac{1}{n}$ für $i, j > N_0(n)$ gilt $\left|a_i\right| < \left|a_{(N_0+1)}\right| + \frac{1}{n}$ für alle $i > N_0$. Daher ist $\left|a_i\right| \leq \max\left(|a_1|, \ldots, \left|a_{(N_0)}\right|, \left|a_{(N_0+1)}\right| + \frac{1}{n}\right)$ für alle i und a ist beschränkt.

ÜBUNG [07]:
Zeige $a, b \in \mathit{Cauchy}(\mathbb{Q}) \Rightarrow a \cdot b \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$.

MATH: Da die beiden Verknüpfungen jetzt als wohldefiniert gezeigt wurden, in jeder Komponente die Ringaxiome erfüllt sind und die konstanten Folgen
$i \mapsto 0$ und $i \mapsto 1$
beide in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ liegen, ist $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ offenbar ein kommutativer Ring. Allerdings kein Körper, denn Folgen, die den Wert Null annehmen, kann man nicht invertieren. Schlimmer noch, die Cauchy-Folge

$$n \mapsto \frac{1}{n}$$

hat zwar eine inverse Folge, nämlich $n \mapsto n$, aber diese ist keine Cauchyfolge mehr.

Idee: Es kommt bei den Cauchy-Folgen nur auf das ultimative Verhalten der

Folge an. Daher führen wir eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ ein:

$a, b \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q}):\ a \sim b :\Leftrightarrow a - b$ ist Nullfolge.

DENKANSTOSS: Zeige, dass wirklich eine Äquivalenzrelation vorliegt. Benutze insbesondere die Dreiecksungleichung, um Transitivität von $\sim$ zu zeigen.

MATH: Summe und Produkt in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ sind verträglich mit ~, d.h.

$a, b, a', b' \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ mit $a \sim a', b \sim b' \Rightarrow$

1.) $(a+b) \sim (a'+b')$

2.) $(a \cdot b) \sim (a' \cdot b')$

DENKANSTOSS: 1.) ist offenbar einfach zu zeigen. Führe den Beweis von 2.) durch, indem du die Kernidee

$|a_i \cdot b_i - a_i' \cdot b_i'| \le |a_i \cdot b_i - a_i \cdot b_i'| + |a_i \cdot b_i' - a_i' \cdot b_i'|$

weiter ausführst.

MATH: Die Äquivalenzklassen bilden somit unter vertreterweiser Addition und Multiplikation einen Ring, wie man leicht zeigt. Denn schwierig ist allenfalls die Vertreterunabhängigkeit der Operationen, diese bekommt man aber sofort aus 1.) und 2.). Die Ringaxiome folgen automatisch, da sie bereits für $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ gelten:

Die Menge der Äquivalenzklassen $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\sim$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

Behauptung: $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\sim$ ist sogar ein Körper.

ÜBUNG [08]:

Zeige: Ist $a \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ keine Nullfolge, so ist

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : i \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{a_i} & a_i \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge, für die gilt:

$a \cdot b \sim 1.$

MATH: Wir wollen diesem Körper noch eine Anordnung geben: Es gilt offenbar:

$a, b \in \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ mit

$a \nsim b$, d.h. $[a] \neq [b] \Rightarrow$ *entweder* $\exists\, N \in \mathbb{N}: \forall\, n > N:\ a_n < b_n$ *oder* $\exists\, N \in \mathbb{N}: \forall\, n > N:\ b_n < a_n$

.

Im ersten Fall wird man für die Äquivalenzklassen $[a]$, $[b]$ definieren

$[a] < [b]$

im zweiten Fall

$[b] < [a]$.

MATH: Die Axiome eines angeordneten Körpers sind erfüllt. Die Anordnung setzt die Anordnung von $<$ fort, indem wir $a \in \mathbb{Q}$ mit der Äquivalenzklasse der konstanten Folge $i \mapsto a$ identifizieren:

$$\iota : \mathbb{Q} \to \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})\,/\!\sim\,,\ a \mapsto [\,(\mathbb{N} \to \mathbb{Q}, i \mapsto a)\,]$$

DENKANSTOSS: Zeige dies.

MATH: Der angeordnete Körper $(\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim, +, \cdot, <)$ ist vollständig, d.h. jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge besitzt ein Supremum, und erfüllt das Archimedische Axiom. Daher kann dieser Körper als $\mathbb{R}$ gewählt werden.

MATH: Um einzusehen, dass Cauchy-Folgen in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$ gegen einen Grenzwert konvergieren, benötigen wir noch den **Absolutbetrag**

$$|.| : \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim\, \to \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim,\ [a] \mapsto \begin{cases} -[a] & \text{, falls } [a] < [0] \\ [a] & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dieser erfüllt die **Dreiecksungleichung**.

Um nun nachzuweisen, dass $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$ vollständig ist, weisen wir nach, dass jede Cauchy-Folge von Elementen aus $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$ auch in Cauchy(<)/~ konvergiert:

FREIWILLIGES PROJEKT:
Sei nun $x : \mathbb{N} \to \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$. 1) Zeige: Es existiert eine rationale Folge $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $x_n < \iota(q_n) < x_n + \iota\left(\frac{1}{n}\right)$. 2) Zeige: $q_c : \mathbb{N} \to \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim,\ n \mapsto \iota(q_n)$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$. 3) Zeige: q_c konvergiert in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\!\sim$ gegen einen Grenzwert g. 4) Zeige: x konvergiert gegen den Grenzwert g. Hinweis zu 1): Jedes einzelne der x_n entspricht einer Äquivalenzklasse von Cauchy(<)/~; für die Wahl des q_n nutze einen expliziten Vertreter dieser Restklasse.

Damit ist die Behauptung von oben gezeigt.