1.) Wiederholung: Verknüpfungen, Gruppen- und Körperaxiome, Cauchy-Folgen, Konvergenz

Wiederhole die obigen Themen, wir stellen Fragen im Testat!

2.) Stetigkeit: Definition und elementare Eigenschaften

Aufgaben: 3

```
> restart;
```

Stetigkeit: Definition und elementare Eigenschaften

Stetigkeit von Funktionen ist eines der grundlegenden Konzepte der Analysis. Wir studieren sie hier für reellwertige Funktionen, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

MATH: Sei $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$ und $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$. f heißt **stetig** in $x_0 \in \mathrm{D}$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \left(\left(x \in \mathrm{D} \wedge |x - x_0| < \delta \right) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right).$$

In Worten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathrm{D}$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Das größtmögliche $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ bezeichnet man auch als **Stetigkeitsmodul** in x_0.

Äquivalent dazu lässt sich Stetigkeit wie folgt charakterisieren:

Für jede konvergente Folge $a = (a_j) : \mathbb{N} \to \mathrm{D}$ mit $\lim_{j \to \infty} a_j = x_0$ gilt:

$$f(x_0) = f\left(\lim_{j \to \infty} a_j\right) = \lim_{j \to \infty} f(a_j),$$

was insbesondere heißt, dass die Folge $(f(a_j)) = f \circ a$ wieder konvergent ist.
(**DENKANSTOSS**: Warum sind die beiden Definitionen äquivalent?)

Ist f stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathrm{D}$, so heißt f **stetig** auf D (oder einfach nur stetig, wenn klar ist, was D ist).
Will man nachweisen, dass $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ stetig ist, so muss man zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x_0 \in \mathrm{D}$ ein geeignetes $\delta > 0$ finden. Dieses δ hängt ε und x_0 ab:

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

MAPLE kennt zwar die Eigenschaft **continuous**, aber auf die Auswertungen sollte man sich nicht unbedingt verlassen. Die Eigenschaft ist bei einigen vordefinierten Funktionen gesetzt, Maple kann aber nicht ausrechnen, dass eine Funktion stetig ist:

```
> is(cos::continuous);
```

$$true \quad (2.1.1)$$

Hier steht dieselbe Funktion, das Resultat sollte eigentlich true lauten:

```
> is((x->cos(x))::continuous);
```

$$false \quad (2.1.2)$$

MAPLE: In dem folgenden Beispiel setzt Maple voraus, dass die noch nicht näher bestimmte Funktion f stetig ist:

```
> limit(f(1/n),n=infinity);
```

$$f(0) \quad (2.1.3)$$

Spezifiziert man die Funktion aber genauer, so merkt selbst Maple, dass das nicht immer so ist:

```
> f:=x->piecewise(x<=0,0,1):
> f(x);
```

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & \mathit{otherwise} \end{cases} \quad (2.1.4)$$

```
> limit(f(1/n),n=infinity);
```

$$1 \quad (2.1.5)$$

Aber

```
> f(0);
```

$$0 \quad (2.1.6)$$

Die folgende Abschwächung von Stetigkeit ist oft hilfreich, zum Beispiel bei der Visualisierung.

MATH: Sei $\varepsilon > 0$. Eine Funktion $f: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ heißt **ε-stetig** in $x_0 \in \mathrm{D}$ (oder **stetig mit der Genauigkeit ε**), falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\left(x \in \mathrm{D} \wedge |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

f ist offensichlich stetig in x_0, falls f für jedes $\varepsilon > 0$ ε-stetig in x_0 ist.

ÜBUNG [01]:

1) Zeige

```
> piecewise(x<=0,0,1);
  f:=unapply(%,x):
```

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & \mathit{otherwise} \end{cases}$$

ist ε-stetig in 0 für jedes $\varepsilon > 1$ und ε-unstetig in 0 für jedes positive $\varepsilon \leq 1$, also unstetig in 0.

2) Konstruiere eine Funktion $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, die in jedem Punkt von $[0, 1]$ ε-stetig für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ist, aber in zwei Punkten (z. B. $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{2}{3}$) nicht ε-stetig

für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ist.

Hinweis: In 2) reicht die bloße Angabe einer Funktion nicht aus, du solltest auch begründen, warum diese Funktion die gewünschten Eigenschaften besitzt.

MAPLE: Das folgende Programm bestimmt für gegebenes ε und eine **monotone** reelle Funktionen im Intervall $[a, b]$ das maximal mögliche δ, also den Stetigkeitsmodul, und visualisiert ihn. Das Programm funktioniert nur für monotone stetige Funktionen. Eine Berücksichtigung aller möglichen Fälle würde das Programm zu unübersichtlich machen.

```
> with(plots):
> StrengMonoton:=proc(epsilon::Range(0,infinity),
  f::procedure, a::And({realcons,Not(infinity)}), b::And(
  {realcons,Not(infinity)}))
    local delta,F,alpha,beta;

    # Test des Intervalls:
    if a>=b then
      error "Kein zulässiges Intervall";
     end if;

    # Wir bestimmen den Stetigkeitsmodul delta>0 im Intervall
  [a,b]
    delta:=proc(u)
      local s1,s2;

      s1:=fsolve(f(x)=f(u)+epsilon,x,a..b);
      s2:=fsolve(f(x)=f(u)-epsilon,x,a..b);
      if not type(s1,float) then
        s1:=infinity;
       else
        s1:=s1-u;
       end if;
      if not type(s2,float) then
        s2:=infinity;
       else
        s2:=u-s2;
       end if;
      return min(abs(s1),abs(s2),(b-a)/2)
    end proc;

     # Nun die Animation (vgl. das letzte Beispiel auf der
  Hilfeseite von animate):
    alpha:=f(a)-delta(a); beta:=f(b)+delta(b);
```

```
 print( `Hier entsteht eine Animation:` );
 F:=u->display(
   plot([u,t,t=alpha..beta], color=green,thickness=2),
   plot([u-delta(u),t,t=alpha..beta], color=green),
   plot([u+delta(u),t,t=alpha..beta], color=green),
   plot([t,f(u)+epsilon,t=a..b],color= blue),
   plot([t,f(u),t=a..b],color= blue),
   plot([t,f(u)-epsilon,t=a..b],color= blue)
  );
 animate(F,[x],x=a..b,background=plot(f(x),x=a..b),axes=
normal,frames=50);
end proc:
```

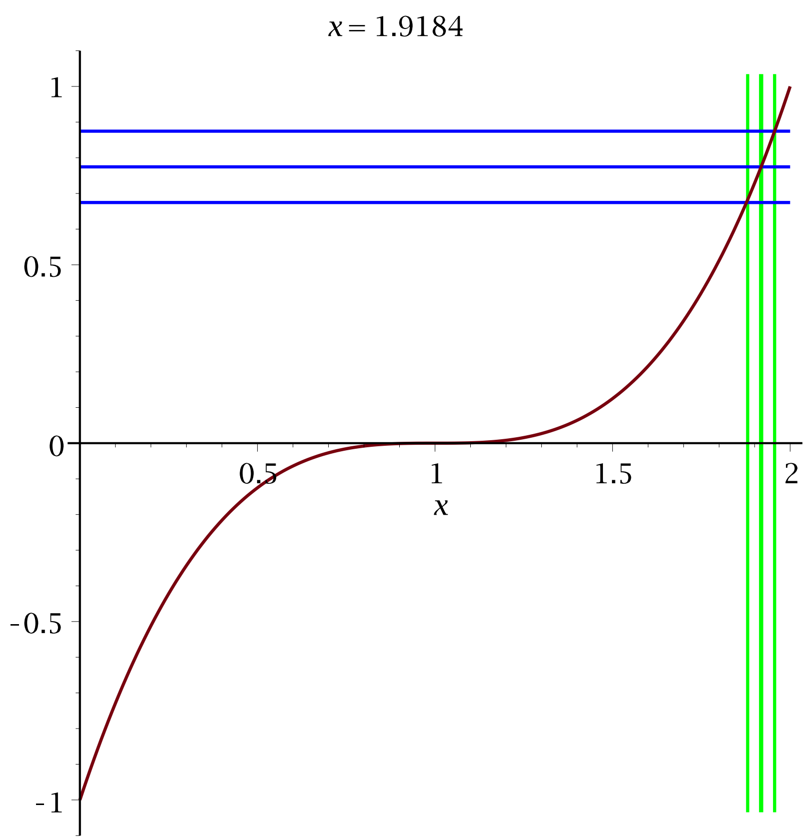
Ein Beispiel (bitte bei Animation Schritte von Hand steuern):

```
> f:=x->(x-1)^3;
```

$$f := x \to (x-1)^3 \tag{2.1.8}$$

```
> StrengMonoton(1/10,f,0,2);
```

Hier entsteht eine Animation:



Man beachte, dass der grüne (δ-)Bereich auf der x-Achse in den blauen (ε-) Bereich auf der Bildachse abgebildet wird. Der erste Bereich ist umso breiter, je flacher die Funktion ist. Teste noch mit anderem Input, z. B.

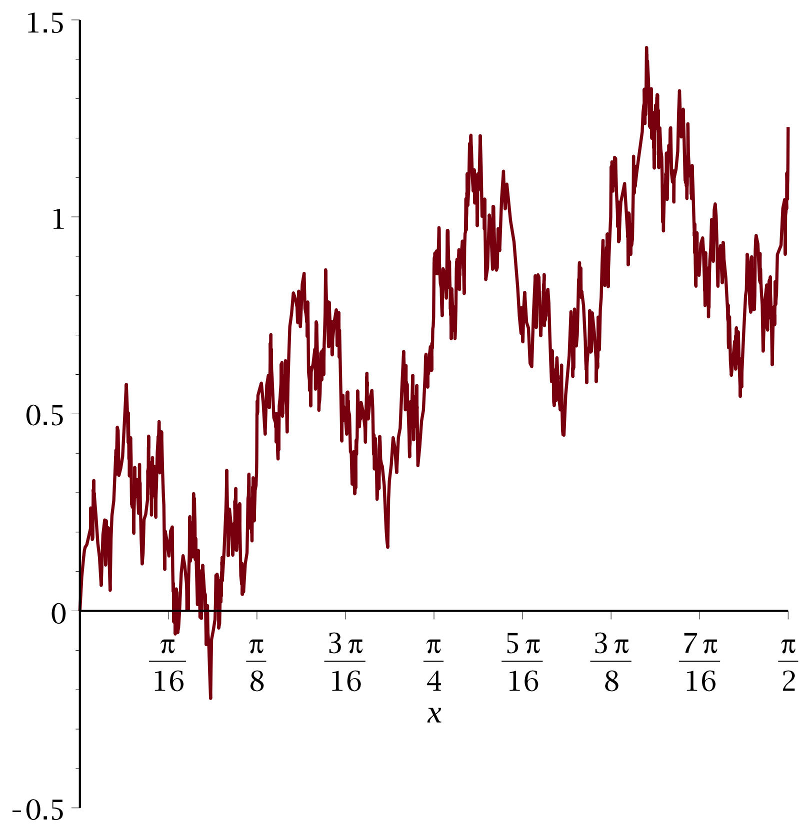
$$\varepsilon = \frac{1}{10}, f := x \to \sqrt{x},\ a := 0,\ b := 1,$$

damit man du ein sicheres Gefühl entwickelst.

DENKANSTOSS: Verstehe die Idee des Programms **StrengMonoton**.

MATH: Man darf übrigens nicht glauben, dass stetige reelle Funktionen stückweise monoton sind. Hier ist ein Beispiel einer recht wilden stetigen Funktion.

```
> g:=sum(1/n^2*sin(n^4*x),n=1..100):
> plot(g,x=0..Pi/2,-0.5..1.5);
```



Gleichmäßige Stetigkeit

MATH: Sei $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$ und f: $\mathrm{D} \to \mathbb{R}$. f heißt **gleichmäßig stetig** auf D, wenn gilt:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\,(x,\ y \in D \wedge |x-y| < \delta\,) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,).$

In Worten:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

für alle $x,\ y \in D$ mit $|x-y| < \delta$. Mit anderen Worten: δ hängt nicht mehr vom betrachteten Punkt ab.

Das größtmögliche $\delta = \delta(\varepsilon)$ bezeichnet man auch mit **Stetigkeitsmodul**.

Sei $\varepsilon > 0$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig ε-stetig auf D (oder gleichmäßig stetig mit der Genauigkeit □), falls ein $\delta > 0$ existiert mit

$(\,x,\ y \in D \wedge |x-y| < \delta\,) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

f ist offensichtlicht gleichmäßig stetig auf D, falls f für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig ε-stetig auf D ist.

ÜBUNG [02]:

1) Mache mit Hilfe des Programmes **StrengMonoton** plausibel, dass $x \to x^2$ auf $[1, \infty]$ nicht gleichmäßig stetig ist.

2) Mache mit Hilfe des Programmes **StrengMonoton** plausibel, dass $x \to \dfrac{1}{x}$ auf $(0,\ 1]$ nicht gleichmäßig stetig ist.

3) Gib in beiden Fällen eine Einschränkung der Funktion auf ein kleineres Intervall an, sodass gleichmäßige Stetigkeit vorliegt.

4) Beweise die Behauptungen aus 1) und 2). Hinweis: In **StrengMonoton** wird das maximal mögliche δ ausgerechnet.

MATH: Ist der Definitionsbereich D der stetigen Funktion f kompakt, etwa ein abgeschlossenes Intervall, so ist f gleichmäßig stetig auf D.

MATH: Wir beschränken uns jetzt auf sehr spezielle Funktion - nämlich solche Funktionen, bei denen ε und δ immer in folgenden Zusammenhang stehen:

$\varepsilon = k \cdot \delta$ für ein festes, von der Funktion abhängiges, $k \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dann liegt der Funktionsgraph einer solchen, gleichmäßig stetigen Funktion $f\colon [a,\ b] \to \mathbb{R}$ in dem Parallelogramm mit gegenüberliegenden Ecken

$A := (a,\ f(a))$ und $B := (b,\ f(b))$.

Dabei haben die vier Kanten Steigung k und $-k$, sie liegen also auf den folgenden vier Geraden:

$A + \lambda \cdot (1,\ k)$

$A + \lambda \cdot (1, -k)$

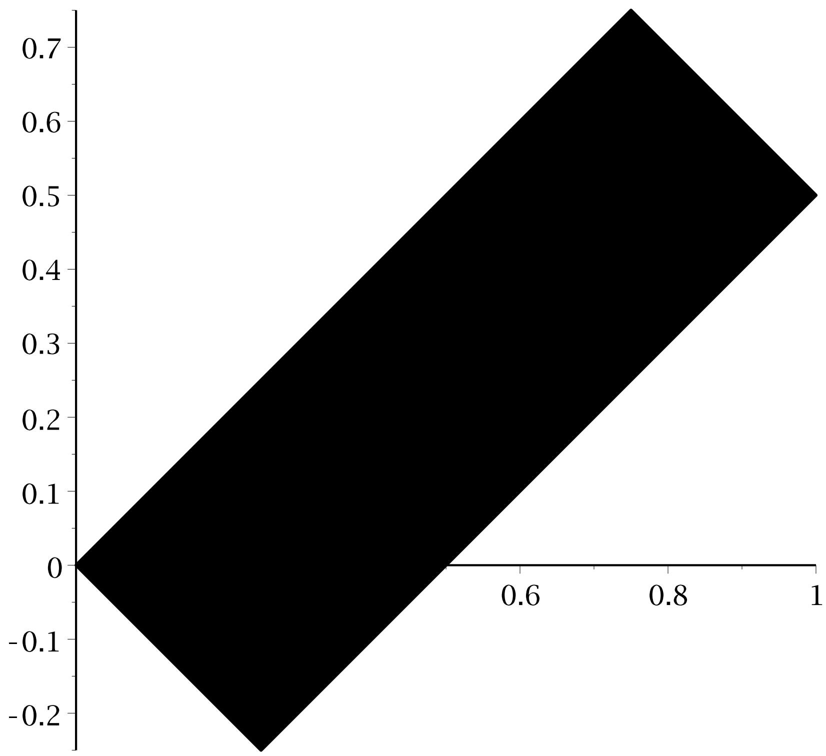
$B + \lambda \cdot (-1,\ k)$

$B + \lambda \cdot (-1, -k)$

Offenbar muss man die erste und die dritte bzw. die zweite und die vierte Gerade zum Schnitt bringen, um die anderen zwei Eckpunkte des Parallelogramms zu bekommen. Dass wirklich ein Parallelogramm vorliegt, äußert sich darin, dass die entsprechenden Werte der λ allesamt positiv sind.

BEISPIEL: Der Graph jeder gleichmäßig stetigen Funktion $f\colon [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = \frac{1}{2}$ liegt für $k = 1$ in folgendem Parallelogramm:

```
> plots[polygonplot]([[0,0],[3/4,3/4],[1,1/2],[1/4,-1/4]],
  scaling=constrained);
```



ÜBUNG [03]:

Hinweis: 0) Was sind die obigen Bedingungen?
1) Fasse kurz zusammen, warum bei obigen Bedingungen der Funktionsgraph von f innerhalb eines Parallelogramms liegt.
2) Schreibe ein Programm **Paral(A,B,k)**, welches zwei Paare $A := (a, f(a))$ und $B := (b, f(b))$ mit $a < b$, sowie das positive k einliest und das gerade beschriebene Parallelogramm ausgibt.
Hinweis: Schnittpunkte von Geraden bestimmen.

Das Programm **Paral** soll mit dem vorgegebenen Programm **MultParal** funktionieren, welches eine Liste mit Paaren $[a_i, b_i]$ und k von oben als Eingabewerte hat. Man kann dazu sehen, ob die unten angegeben Beispielausgaben reproduziert werden. (Vorsicht: Ohne das eigene Programm verschwinden sie beim ausführen!)

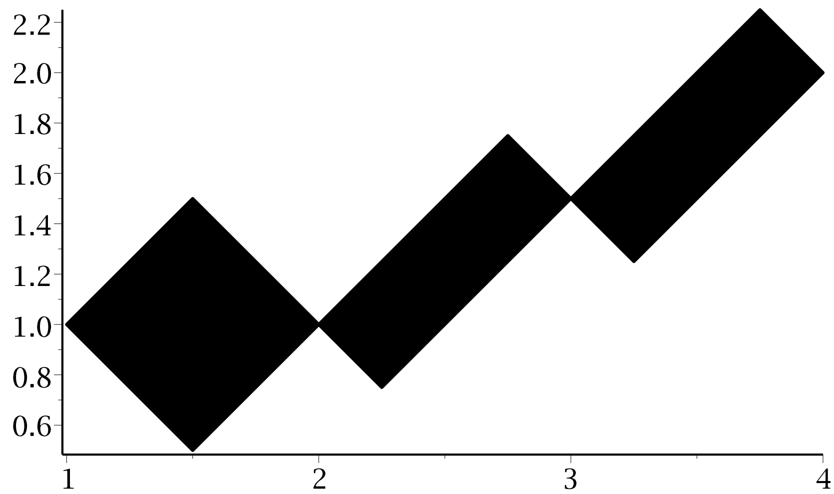
```
Paral:=proc(A::list,B::list,k::positive)

end proc;
```

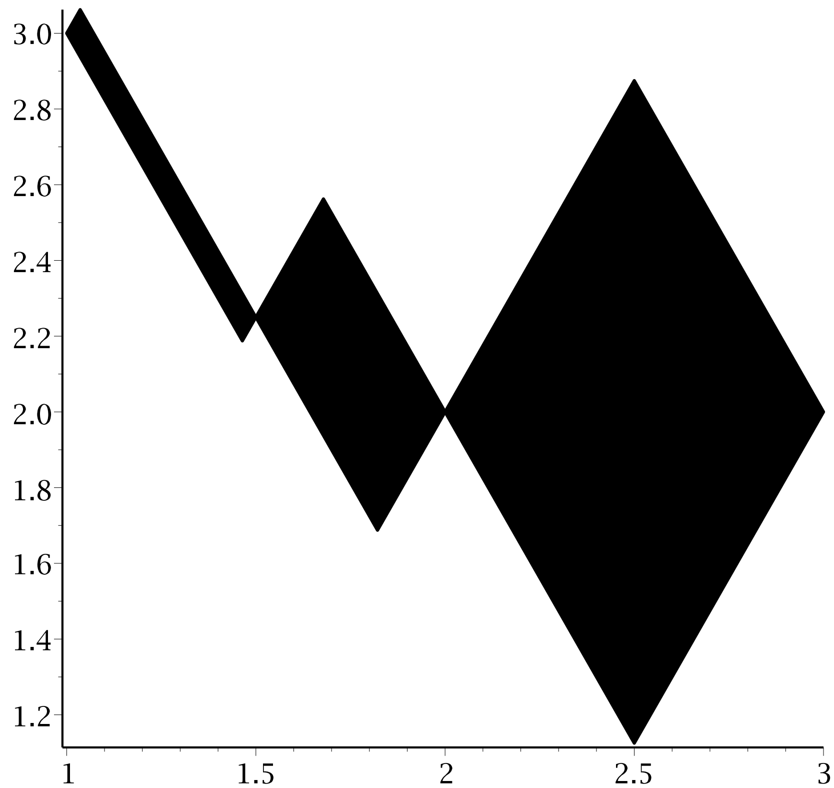
$$Paral := \mathbf{proc}(A::list,\ B::list,\ k::positive)\quad \mathbf{end\ proc} \tag{2.2.1}$$

```
> MultParal:=proc(l::listlist,k::positive)
   local p,ll,i;

   p:=NULL;
   ll:=map(a->a[1],l);
   if not ll=sort(ll) then
    error "Die Punkte muessen aufsteigend gegeben sein!";
   fi;
   if not nops(ll)=nops({op(ll)}) then
    error"Alle Punkte muessen verschiedene erste Koordinaten
haben!";
   fi;
   if {2}=map(nops,l) then
    error("Es wird eine Liste von Punkten als Eingabe
verlangt!")
   fi;
   for i from 1 to nops(l)-1 do
     p:=p,Paral(l[i],l[i+1],k):
   od;
   plots[display](p);
end:
> MultParal([[1,1],[2,1],[3,3/2],[4,2]],1);
```




```
> MultParal([[1,3],[3/2,9/4],[2,2],[3,2]],7/4);
```



3.) Anwendungen von Stetigkeit: Zwischenwertsatz, Intervallschachtelung, Extrema

Aufgaben: 3

```
> restart;
```

Zwischenwertsatz

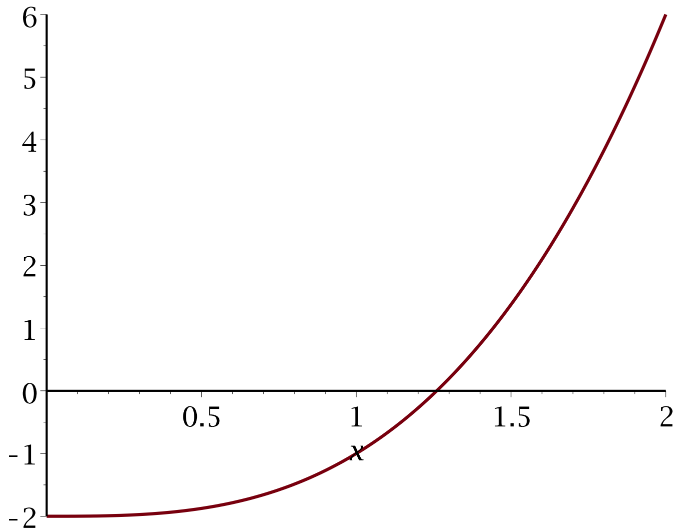
Viele Aussagen, die vorher schwierig zu beweisen waren, werden mit Hilfe der folgenden Sätze zu einfachen Stetigkeitsverifikationen. In diesem Abschnitt sind unsere Abbildungen meistens reellwertig mit einem abgeschlossenen Intervall als Definitionsbereich.

MATH: (**Zwischenwertsatz**) Sei f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$ (oder $f(a) > 0 > f(b)$). Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Zum numerischen Rechnen, wie auch als wesentlichen Beweisschritt für den

Zwischenwertsatz, hat man die ε-Version des Satzes:
Sei f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ eine ε-stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$ (oder $f(a) > 0 > f(b)$). Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $|f(c)| < \varepsilon$.

```
> plot(x^3-2,x=0..2);
```



Jetzt ist es ganz einfach, die Existenz der dritten Wurzel einer reellen Zahl y zu beweisen:

$$f_y : x \mapsto x^3 - y$$

ist stetig (in x für festes y). Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $y > 0$ gilt. Dann ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ mit $a := 0$ und $b := \max(1, y)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $c \in [a, b]$ mit $c^3 = y$. Da $x \to x^3$ streng monoton ist, ist dieses c eindeutig bestimmt.

Das selbe Argument zeigt:

MATH - Satz: Ist f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend (bzw. fallend), so ist

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \text{ (bzw. } f([a, b]) = [f(b), f(a)]\text{)}$$

und f definiert eine Bijektion der beiden Intervalle.

Man beachte: Dass man eine Bijektion auf das Bild bekommt, folgt leicht aus der strengen Monotonie, aber dass das Bild wieder ein abgeschlossenes Intervall ist, bekommen wir erst aus der Stetigkeit mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.
Man hat noch den folgenden Zusatz:

MATH - Satz: In der obigen Situation ist die inverse Abbildung (Umkehrfunktion)

$$f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$$

ebenfalls stetig.

Intervallschachtelung

Wir wollen noch sehen, wie gut unsere neuen Begriffsbildungen sind, um wirklich eine dritte Wurzel auszurechnen, sagen wir für $y := \frac{1}{11}$.

```
> evalf((1/11)^(1/3));
```

$$0.4496443130 \tag{3.2.1}$$

```
> f:=x->x^3-1/11;
```

$$f := x \rightarrow x^3 - \frac{1}{11} \tag{3.2.2}$$

Das folgende Programm approximiert eine Nullstelle von

$$f: \left[0, \max\left(\frac{1}{11}, 1\right)\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

durch Intervallschachtelung:

```
> Fo:=proc(f::procedure, l, r, epsilon)
    local p,n,m,a;
    p:=r;
    n:=l;
    m:=(p+n)/2;
    a:=1;
    while (abs(f(m)) >= epsilon) do
      if f(m)>0 then
        p:=m;
      else
        n:=m;
      end if;
      m:=(p+n)/2;
      a:=a+1;
    end do;
    return m,a;
  end proc:
> evalf(Fo(f, 0, max(1,1/11), 1/1000));
```

$$0.4492187500, 8. \tag{3.2.3}$$

Wir besprechen ein paar leichte Anmerkungen zum Programm als Aufgabe.

ÜBUNG [04]:
1) Kritisiere das obige Programm der Intervallschachtelung. Begründe dabei, warum das ε nicht so wichtig ist wie die Anzahl der Schritte oder - was dem direkt entspricht - die Länge des relevanten Intervalls. 2) Gib ein Beispiel an, das das in 1) beschriebene Problem mit Hilfe von **Fo** verdeutlicht. 3) Schreibe das Programm so um, dass man eine Fehlergenauigkeit vorgeben kann, also ein $\delta > 0$, sodass der errechnete Wert von dem tatsächlichen Wert höchstens um $\pm\delta$ abweicht.

4) Ergänze das Programm indem du die Voraussetzungen (bis auf die Stetigkeit von **f**) des Zwischenwertsatzes prüfst.

MATH: Das Verfahren der Intervallschachtelung entspricht also genau dem Zwischenwertsatz. Man braucht lediglich Stetigkeit, jedoch keine Monotonie. Dass der Funktionswert eines Punktes x aus dem Definitionsbereich unter Umständen sehr nahe bei Null liegt, besagt nicht, dass man nahe bei x eine Nullstelle hat.

Extrema

MATH - SATZ: Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gibt es $g, k \in [a, b]$ mit

$$f(k) \leq f(x) \leq f(g)$$

für alle $x \in [a, b]$. Mit anderen Worten, ein stetiges f nimmt sein Minimum und Maximum auf einem abgeschlossenen Intervall an.

Es ist leicht einzusehen, dass die Situation bei offenen Intervallen anders ist.

ÜBUNG [05]:
Zeige an einem Beispiel, dass die obige Aussage für offene Intervalle (a, b) falsch ist.

MATH - Bemerkung: Eine Folgerung des obigen, sehr wichtigen Satzes ist, dass bei stetigen Funktionen Bilder abgeschlossener Intervalle wieder abgeschlossene Intervalle sind.

MATH - Bemerkung: Bilder beschränkter Intervalle brauchen unter stetigen Abbildungen nicht beschränkt zu sein, sehr wohl aber unter gleichmäßig stetigen Abbildungen.

Die □-Version dieser Aussage zeigen wir mit Hilfe der folgenden Aufgabe, welche sich durch ein $2\,\varepsilon$-Argument zeigen lässt.

ÜBUNG [06]:

Sei $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig ε-stetig für $\varepsilon := \frac{1}{10}$ mit dem Stetigkeitsmodul $\delta := \frac{1}{4}$.

Zeige:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x)\right| < \frac{2}{10}$$

für alle $x \in (0, 1)$.

Hinweis: man kann nur um einen Wert kleiner als $\delta = \frac{1}{4}$ "springen".

4.) Grenzwerte und Stetigkeit

Aufgaben: 2

```
> restart;
```

Grenzwerte und Stetigkeit

Bislang haben wir Stetigkeit meistens bei abgeschlossenen Intervallen studiert. Was kann bei offenen oder unbeschränkten Intervallen passieren?

MATH: Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$, falls für jedes offene Intervall (a, b) mit $x \in (a, b)$ mindestens ein Punkt $y \in (a, b) \cap \mathrm{D}$ existiert mit $y \neq x$.

MATH: Sei $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein **Häufungspunkt** von D. Eine Funktion $f: \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ heißt **konvergent** gegen $y_0 \in \mathbb{R}$ für x gegen x_0 falls zu jedem □ > 0 ein $\delta > 0$ existiert mit

$$x \in \mathrm{D} \text{ und } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

In Zeichen:

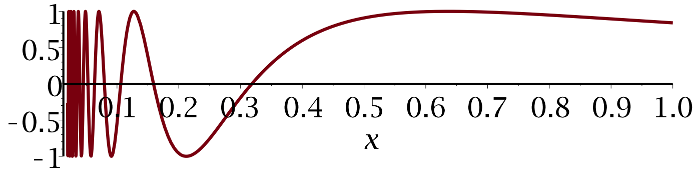
$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \mathrm{D}} f(x) = y_0.$$

Man beachte: Ist $x_0 \in \mathrm{D}$ und $y_0 = f(x_0)$, so ist f genau dann konvergent gegen y_0, falls f in x_0 stetig ist.

```
> limit(sin(1/x),x=0);
```

$$-1\,..1 \tag{4.1.1}$$

```
> plot(sin(1/x),x=1/50..1);
```



Dieses interpretieren wir so:

$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist auf $(0,\infty)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, da sonst der Grenzwert für $x \to 0$ existierte, denn man hat den offensichtlichen Satz:

MATH: Ist $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so existiert $\lim_{x \to a} f(x)$ und somit lässt sich f zu einer (gleichmäßig) stetigen Funktion auf $[a, b]$ fortsetzen.

DENKANSTOSS: Man beweise diese Aussage. (Hinweis: Eine gegen a konvergente Folge (x_n) liefert eine Cauchyfolge $(f(x_n))$.)

Wir betrachten die Konzepte an einem leichten Beispiel.

ÜBUNG [07]:

1) Prüfe mit dem **limit**-Befehl von Maple für $i, j = 0, \ldots, 4$, ob

$$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^i \cdot \sin\left(\frac{1}{x^j}\right)$$

zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
2) Gib allgemein an, für welche $i, j \geq 0$ diese Fortsetzung möglich ist und beweise die Existenz der Fortsetzung für diese Fälle.

MATH: Sei $f\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Man sagt, $f(x)$ konvergiert gegen y_0 für $x \to \infty$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N > a$ existiert mit

$$x > N \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0.$$

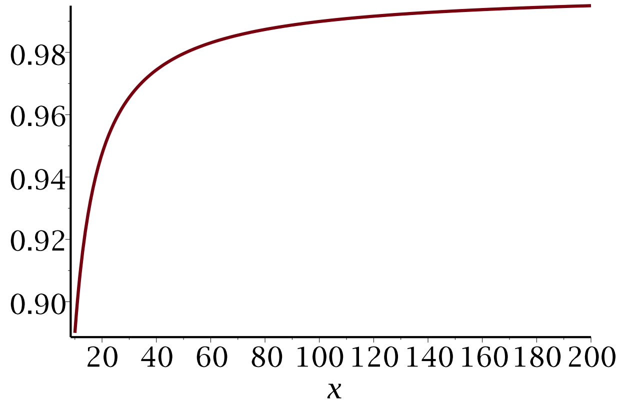
Entsprechend definiert man Konvergenz für $x \to -\infty$.

DENKANSTOSS: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass die Grenzwerte $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ existieren, so ist f beschränkt.

```
> limit((x^2-x-1)/x^2,x=infinity);
```

$$1 \tag{4.1.2}$$

```
> plot((x^2-x-1)/x^2,x=10..200);
```



Diese Aussage interpretieren wir so, dass $x^2 - x - 1$ genauso schnell gegen unendlich wächst wie x^2. Man beachte, dass die Konvergenz des Quotienten nicht die Konvergenz der Differenz impliziert.

MAPLE: Wenn wir früher mit dem **limit**-Befehl von Maple Grenzwerte von Folgen ausgerechnet haben, lag die folgende Situation vor: Unsere Folge kam durch Einschränkung einer reellen Funktion auf die natürlichen Zahlen zustande und Maple hat den Grenzwert der Funktion ausgerechnet.