1) Beispiele und erste Theorie von Vektorräumen

Aufgaben: 8

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Definition: Vektorräume

MATH: Sei *K* ein Körper und *V*, genauer *(V,+)*, eine abelsche Gruppe. *V* heißt ein K-**Vektorraum**, falls eine Abbildung (genannt Produkt):

$$K \times V \to V\colon (a, v) \to a\, v$$

existiert mit folgenden Eigenschaften:

1.) $a\,(v_1 + v_2) = a\,v_1 + a\,v_2$ für alle $a \in K$ und $v_1, v_2 \in V$,

2.) $(a_1 + a_2)\,v = a_1\,v + a_2\,v$ für alle $a_1, a_2 \in K$ und $v \in V$,

3.) $(a\,b)\,v = a\,(b\,v)$ für alle $a, b \in K, v \in V$,

4.) $1\,v = v$ für alle $v \in V$.

Die Idee ist nun, auf dieser abstrakten Definition eine Theorie aufzubauen, die in möglichst vielen Situationen etwas sagt, was relevant und nicht trivial ist. Um diese Theorie zu lernen, ist es wichtig, dass man jede abstrakte Begriffsbildung und jede abstrakte Einsicht sofort in etwa zehn konkreten Sitationen umsetzt. Anderenfalls bleibt die Theorie ein Schrank mit leeren Schubladen und wird schnell vergessen.

BEISPIEL 1: Sei *K* irgendein Körper, etwa

$\mathbb{R}$ = Körper der reellen Zahlen,
$\mathbb{Q}$ = Körper der rationalen Zahlen,
$\mathbb{C}$ = Körper der komplexen Zahlen,
$\mathbb{F}_2$ = Körper aus zwei Elementen.

Dann ist

K

ein Vektorraum über *K*, wobei das Produkt das Produkt in dem Körper ist.

Wir sind bei Strukturen in der Mathematik immer an den Abbildungen interessiert, welche Struktur erhaltend sind. In diesem Fall erhalten wir folgende Definition:
MATH: Es sei K ein Körper und V, W seien K-Vektorräume. Eine Abbildung $\psi : V \to W$ heißt linear, wenn für alle $a, b \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$\psi(a \cdot v_1 + b \cdot v_2) = a \cdot \psi(v_1) + b \cdot \psi(v_2).$$

Statt linear nennt man eine solche Abbildung auch oft einen Homomorphismus, genauer einen K-Vektorraumhomomorphismus.
Ist ψ noch zusätzlich injektiv, surjektiv bzw. bijektiv so heißt ψ (K-Vektorraum) Monomorphismus, Epimorphismus bzw. Isomorphismus. Im Falle von $V = W$ heißt ψ Endomorphismus von V.

DENKANSTOSS: Eine wichtige Eigenschaft, die man sich für Isomorphismen ψ

wünschen möchte, ist die Linearität von ψ^{-1}. Zeige, dass diese bereits aus der Linearität von ψ folgt.

Wichtigstes Beispiel: K^M

BEISPIEL 2: Sei *M* irgendeine Menge und *K* ein Körper. Dann ist

$$K^M := \{f \mid f: M \to K\}$$

ein *K*-Vektorraum vermöge der werteweise definierten Operationen:

$$f + g : M \to K:\ m \to f(m) + g(m) \qquad \text{für alle } f, g \in K^M \text{ und}$$

$$a\,f:\ M \to K:\ m \to a\,f(m) \qquad \text{für alle } f, g \in K^M,\ a \in K.$$

MATH: Ihr werdet sehen, dass jeder Vektorraum bis auf Isomorphie von dieser Gestalt ist.

DENKANSTOSS: Verifiziere die Vektorraumaxiome (durch Rückführung auf die Körperaxiome).

BEISPIEL 2a: $M = \{1, 2, .., n\}$. In diesem Fall schreiben wir statt *f* auch $\begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ ... \\ f(n) \end{bmatrix}$ und statt K^M auch K^n und sprechen von dem Raum der n-**Tupel** über K.

```
> v1:=Vector(3,symbol=x);v2:=Vector(3,symbol=y);
```

$$v1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

```
> v1+v2;
```

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

```
> a*v1;
```

$$\begin{bmatrix} a\,x_1 \\ a\,x_2 \\ a\,x_3 \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

DENKANSTOSS: Verifiziere alle Vektorraumaxiome für K^3 mit Maple.

Wir haben bereits gesehen, dass Matrizen uns lineare Abbildungen liefern, also in diesem Fall zum Beispiel

```
> A:=Matrix(3,3,[[1,1,0],[0,1,1],[1,0,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

```
> A.v1;
```

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

```
> A.Vector(3,[1,1,1]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

Die Matrix A induziert die lineare Abbildung $\psi_A : K^3 \rightarrow K^3 : v \mapsto A.v$, welche ein Endomorphismus von K^3 ist.

DENKANSTOSS: Wie findet man heraus, ob ψ_A ein Monomorphismus, also injektiv, ist? *Hinweis*: Denke an das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

MATH: Ihr werdet später sehen, dass sich jede lineare Abbildung durch eine Matrix beschreiben lässt, falls die Menge M endlich ist.

BEISPIEL 2b: $M = \{1,...m\} \times \{1,..., n\}$. In diesem Fall schreibt man $K^{m \times n}$ statt K^M und nennt die Elemente **Matrizen**:

```
> A:=Matrix(2,3,symbol=x);B:=Matrix(2,3,symbol=y);
```

$$A := \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.7)}$$

```
> A+B;
```

$$\begin{bmatrix} x_{1,1}+y_{1,1} & x_{1,2}+y_{1,2} & x_{1,3}+y_{1,3} \\ x_{2,1}+y_{2,1} & x_{2,2}+y_{2,2} & x_{2,3}+y_{2,3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2.8)}$$

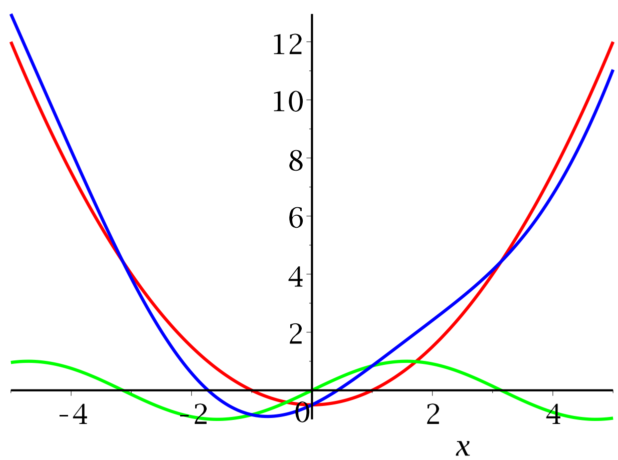
BEISPIEL 2c: $K := \mathbb{R}$ und $M := \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

```
> f:=x->x^2-1;
  sin;
```

$$f := x \to x^2 - 1$$

$$\mathrm{sin} \quad \textbf{(1.2.9)}$$

```
> plot([1/2*f(x), sin(x), (1/2*f+sin)(x)],x=-5..5,color=[red,
  green,blue]);
```



Viele leichte Fragestellungen zu Funktionen im $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ kann man mit Hilfe der Vektorraumaxiome beantworten

ÜBUNG [01]:

1) Warum kann man an den Schnittstellen des grünen Graphen mit der waagerechten Achse die Schnittstellen der beiden anderen Graphen (blau und rot) ablesen?
2) Welche Vektorraumaxiome hast du bei der Lösung der Aufgabe benutzt? (Hinweis: Hier ist genaues formales Arbeiten gefragt.)

BEISPIEL 2d: $K = \mathbb{R}$ oder $K := \mathbb{C}$ und $M := \mathbb{N}$:= Menge der natürlichen Zahlen. Die Elemente von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißen auch (reelle oder komplexwertige) Folgen:

```
> x:i->x[i];y:i->y[i];
```

$$i \to x_i$$

$$i \to y_i \tag{1.2.10}$$

```
> (x+y)[i];x[i]+y[i];
```

$$(x+y)_i$$

$$x_i + y_i \tag{1.2.11}$$

Hier unterstützt Maple unser Spiel nicht. Man könnte es mit

```
> f:='f';f(x);g:='g';g(x);(f+g)(x);
```

$$f := f$$

$$f(x)$$

$$g := g$$

$$g(x)$$

$$f(x) + g(x) \tag{1.2.12}$$

versuchen. Den Definitionsbereich muß man selbst im Kopf behalten, sonst handelt man sich nur Schwierigkeiten ein.

Potenzmengen

BEISPIEL 3: $K := \mathbb{F}_2$ Körper aus zwei Elementen, M irgendeine Menge. Dann ist die Potenzmenge

$$\mathrm{Pot}(M)$$

ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ vermöge der Addition "symmetrische Differenz" :

$$A + B := (A \cup B) - (A \cap B) \qquad \text{für} \quad A, B \in \mathrm{Pot}(M)$$

und dem Produkt

$$1\,A := A \text{ und } \quad 0\,A := \{\,\} \quad \text{für alle} \quad A \in \mathrm{Pot}(M).$$

DENKANSTOSS: Verifiziere die Vektorraumaxiome.

BEISPIEL:

```
> Char:=proc(n::posint,M::set(posint))
  local v,i;
    if not M subset {$1..n} then
      error("falsche eingabe");
    end if;
    v:=[seq(0,i=1..n)];
    for i in M do
      v[i]:=1
    end do;
    return v;
```

```
end proc:
> Char(10,{1,4,5,6})+Char(10,{3,5,6}) mod 2;
```

$$[1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] \tag{1.3.1}$$

ÜBUNG [02]:

0) (freiwillig, aber hilfreich bei den weiteren Teilen) Verifiziere die Vektorraumaxiome des $\mathbb{F}_2$-Vektorraumes $\operatorname{Pot}(M)$ aus Beispiel 3.

1) Begründe: Für festes n definiert Char einen Isomorphimus zwischen dem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum Pot({1,...,n}) und $\mathbb{F}_2^n$, dessen Elemente als Listen der Länge n repräsentiert werden. (Stichwort: **Charakteristische Funktion** modulo 2).
2) Schreibe ein Programm, welches den inversen Isomorphismus definiert. Mache einige Tests.

Direkte Summen und Teilräume

BEISPIEL 4: Sind *V* und *W* *K*-Vektorräume, so bildet die Paarmenge $V \times W$ einen *K*-Vektorraum mit den komponentenweisen Verknüpfungen:

$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ für $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ und

$a\,(v, w) := (a\,v, a\,w)$ für $a \in K, v \in V, w \in W$.

Dieser Vektorraum heißt die (äußere) **direkte Summe** von *V* und *W.*
Bezeichnung: $V \oplus W$.

DENKANSTOSS: *K* sei Körper. Zeige:

K^2

ist isomorph zu

$K \oplus K$

(als K-Vektorraum).

MATH: Hat man einen *K*-Vektorraum *V*, so sind seine Teilräume ebenfalls *K*-Vektorräume. Eine Teilmenge *T* von *V* heißt **Teilraum** von *V*, in Zeichen $T \leq V$, falls
1.) $T \neq \varnothing$ (T nicht leer),
2.) $v_1, v_2 \in T, a, b \in K \Rightarrow av_1 + bv_2 \in T$.

DENKANSTOSS: Zeige die Äquivalenz der obigen Definition zu folgender Alternative: Eine Teilmenge T von V heißt Teilraum von V, falls T mit den geerbten (eingeschränkten) Verknüpfungen ein Vektorraum (über demselbem Körper K) ist.

MATH: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, falls

f(-x)=f(x) für alle x $\in \mathbb{R}$

gilt. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **ungerade**, falls

$f(-x)=-f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

gilt.

ÜBUNG [03]:

1) Zeige, dass die geraden Funktionen einen Teilraum G von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bilden.
2) Zeige, dass die ungeraden Funktionen einen Teilraum U von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bilden.
3) Betrachte den Teilraum G der geraden Funktionen und den Teilraum U der ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Zeige, dass

$$f: G \oplus U \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : (g, u) \to g + u$$

ein Isomorphismus ist. (*Hinweis*: Konstruiere die inverse Abbildung von f)

BEISPIEL 5: Wir hatten in Beispiel 2 bereits gesehen, dass die Abbildungen einer beliebigen Menge M in einen Körper K einen Vektorraum bilden, womit sofort folgt, dass die reellwertigen Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ einen Vektorraum bilden. Ein Teilraum davon bilden die Cauchy-Folgen, da die Argumentation hier analog zu der im Falle von Cauchy($\mathbb{Q}$) in dem entsprechenden Worksheet verläuft.

ÜBUNG [04]:

1) Begründe, warum

$$\lim : Cauchy(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : a_n \mapsto \lim_{n \to \infty} a_n$$

ein Homomorphismus von ($\mathbb{R}$-)Vektorräumen ist.
2) Ist dies ein Isomorphismus?
3) Begründe, unter welchen Umständen

$$\lim : Cauchy(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R} : a_n \mapsto \lim_{n \to \infty} a_n$$

ein Homomorphismus von Vektorräumen ist.

MATH: Ist $\psi : V \to W$ ein Homomorphismus von Vektorräumen V, W, so bildet $Kern(\psi) := \psi^{-1}(\{0\})$ einen Teilraum von V (**DENKANSTOSS**: Warum?).

>

>

Isomorphismen

Wir kehren noch einmal zu linearen Abbildungen zurück und erinnern uns:

MATH: Da lineare Abbildungen insbesondere Gruppenhomomorphismen sind, hat jede lineare Abbildung einen Kern und ein Bild.
Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V, W. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
1. f hat eine lineare Umkehrabbildung
2. f hat eine Umkehrabbildung
3. f ist bijektiv, also injektiv und surjektiv

4. Kern(f)={0} und Bild(f)=W
Ist eine (und daher jede) dieser Aussagen wahr, so nennt man *f* einen *Isomorphismus*.

Für jedes $n \geq 1$, sei P_n die Menge der Polynome in der Unbekannten x mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens n. Jedes Element in P_5 (zum Beispiel) kann also mit reellen Koeffizienten $a_0,\ldots, a_5$ geschrieben werden als

```
> a[0]+a[1]*x+a[2]*x^2+a[3]*x^3+a[4]*x^4+a[5]*x^5;
```

$$x^5 a_5 + x^4 a_4 + x^3 a_3 + x^2 a_2 + x a_1 + a_0 \tag{1.5.1}$$

Wir wollen nun ein Polynom mit der Liste seiner Koeffizienten identifizieren. Elemente in P_5 haben also die Form $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$. Rechenoperationen für Polynome lassen sich auch in dieser Listennotation ausführen. Die Multiplikation eines Polynoms p mit der Unbekannten x etwa lässt sich wie folgt (etwas umständlicher als nötig) realisieren:

```
> MultX:=a->[0,seq(a[i],i=1..nops(a))];
  MultX([1,2,3]);
```

$$MultX := a \rightarrow [0, seq(a_i, i = 1..nops(a))]$$

$$[0, 1, 2, 3] \tag{1.5.2}$$

ÜBUNG [05]:

Implementiere zwei Funktionen, **DDx** und **IntDx** von der selben Form wie **MultX**, welche die Ableitung und das unbestimmte Integral (=Stammfunktion) mit Konstante 0 für Polynome realisieren.
Beispielsweise sollen die Funktionen folgende Eigenschaften haben: **DDx([1,2,3])=[2,6]** und **IntDx([1,2,3])=[0,1,1,1]**.

Wir fixieren eine positive Zahl n und wir machen die folgenden Definitionen: es seien $\mathrm{D}: P_n \rightarrow P_{n-1}$ und $I: P_{n-1} \rightarrow P_n$ die gerade implementierten Abbildungen, also die Ableitung und das unbestimmte Integral für Polynome. D und I sind somit gegeben durch die folgenden Formel für ein Polynom

```
> sum(a[i]*x^i,i=0..n);
```

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.5.3}$$

```
> sum(i*a[i]*x^(i-1),i=1..n);
  sum(1/(i+1)*a[i]*x^(i+1),i=0..n-1);
```

$$\sum_{i=1}^{n} i\, a_i x^{i-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i x^{i+1}}{i+1} \tag{1.5.4}$$

Ferner sei $Q_n := \{p(x) \in P_n \mid p(0) = 0\}$.

DENKANSTOSS: Vergewissere dich, dass sich die Abbildungen D und I linear sind und tatsächlich Polynome mit passendem maximalen Grad liefern. Was lässt sich über die Koeffizienten der Elemente von Q_n in der Listennotation aussagen?

ÜBUNG [06]:

Zeige:

1. Die lineare Abbildungen $\mathrm{D}: P_n \to P_{n-1}$ und $I: P_{n-1} \to P_n$ sind nicht Umkehrabbildungen füreinander, auch wenn eine der Abbildungen (welche?) das Linksinverse der anderen ist.
2. Das Bild von I liegt in Q_n und die Einschränkungen $\mathrm{D}: Q_n \to P_{n-1}$ und $I: P_{n-1} \to Q_n$ sind Umkehrabbilkdungen füreinander.