1.) Faktorräume, Restklassen und Homomorphiesatz

Aufgaben: 6

```
> restart;
  with(LinearAlgebra):
```

Faktorräume

Wir wünschen uns eine ähnlich gute Situation wie bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus den Cauchyfolgen über $\mathbb{Q}$, in der eine Äquivalenzrelation auf einem Ring gegeben war und die Menge der Äquivalenzklassen ebenfalls einen Ring bildete. Sprich: Haben wir eine Äquivalenzrelation auf einem Vektorraum gegeben, so wollen wir die Menge der Äquivalenzklassen gerne wieder als Vektorraum identifizieren können. Leider bildet diese Menge im Allgemeinen keinen Vektorraum auf natürliche Weise, d.h. mit den geerbten Verknüpfungen, welche durch vertreterweises Addieren bzw. Skalarmultiplizieren entstehen. Um dies zu gewährleisten, muss unsere Äquivalenzrelation eine zusätzliche Bedingung erfüllen:

MATH: Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem K-Vektorraum heißt **verträglich** mit der Vektorraumstruktur oder einfach **linear**, falls für $v, v', w, w' \in V$ mit $v \sim v'$ und $w \sim w'$ und für alle $a, b \in K$ folgt $(a \cdot v + b \cdot w) \sim (a \cdot v' + b \cdot w')$.

BEISPIEL: Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist die Bildgleichheitsrelation $\sim_{\varphi}$ eine lineare Äquivalenzrelation. Seien $V = W = \mathbb{Q}^{3 \times 1}$ und $\varphi = \varphi_A$ für die folgende Matrix:

```
> A:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

```
> v1:=Vector([1,2,3]);
  v2:=Vector([2,0,4]);
  A.v1;
  A.v2;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

Also gilt $v_1 \sim_{\varphi} v_2$. Aber was ist die Äquivalenzklasse $[v_1]$ von v_1? Dies ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungsystems $A \cdot x = b$, wobei b wie folgt gegeben ist:

```
> b:=A.v1;
```

$$b := \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

```
> M:=<A|b>;
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \\ 7 & 8 & 9 & 50 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(M);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

```
> M1:=<SubMatrix(M,1..2,1..4),Vector[row]([0,0,1,p])>;
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(M1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p-2 \\ 0 & 1 & 0 & -2p+8 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.7)}$$

Also erkennen wir: $[v_1] = \left\{ \begin{bmatrix} p-2 \\ -2 \cdot p + 8 \\ p \end{bmatrix} \middle| \, p \in \mathbb{Q} \right\}$.

BEISPIEL: Ist $U \leq V$ ein Unterraum des K-Vektorraumes V, so ist durch $v \sim_U w$ $:\Leftrightarrow \mathrm{v} - w \in U$ eine lineare Äquivalenzrelation gegeben. Die Äquivalenzklasse eines Vektors v ist dann gegeben durch

$$[v] = \mathrm{v} + \mathrm{U} := \{\mathrm{v} + \mathrm{u} \mid \mathrm{u} \in \mathrm{U}\}.$$

Wenn wir uns an die Eigenschaften einer linearen Abbildung erinnern, so wird uns klar, dass die vorherige Relation auch als $\sim_{Kern(\varphi)}$ beschrieben werden kann:

```
> NullSpace(A);
```

$$\left\{\left[\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]\right\} \qquad \textbf{(1.1.8)}$$

Dass dies kein Zufall war, sagt uns das folgende Lemma:

MATH: Ist $\sim$ eine lineare Äquivalenzrelation auf dem K-Vektorraum V, so gilt:

1) Die Äquivalenzklasse $[0]$ des Nullvektors ist ein Teilraum U von V; $[0] =: U \leq V$.

2) $\sim = \sim_U$

3) Die Äquivalenzklasse $[v]$ für $v \in V$ ist gegeben durch: $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$.

DENKANSTOSS: Zeige dies.

Mithilfe von linearen Äquivalenzrelationen bzw. Unterräumen können wir neue Vektorräume konstruieren:

MATH: Sei $U \leq V$ ein Unterraum des K-Vektorraumes V und $\sim := \sim_U$ die zugehörige Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen $V/\sim$ wird mit V/U (lies: V modulo U) bezeichnet und V/U heißt **Faktorraum** von V nach U.

1) V/U wird mit

$$\forall\ v, w \in V: (v + U) + (w + U) := (v + w) + U$$

und

$$\forall\ v \in V, a \in K: a \cdot (v + U) := a \cdot v + U$$

zu einem K-Vektorraum.

2) Die Abbildung $\varepsilon : V \to V/U : v \mapsto v + U$ ist eine lineare Abbildung, genannt der natürliche Epimorphismus von V auf V/U. Es gilt: $Kern(\varepsilon) = U$.

DENKANSTOSS: Was ist im Beweis von 1) zu zeigen?

DENKANSTOSS: Was ist das inverse Element von $\varepsilon(w)$ für $w \in V$? Hinweis: Mache dir klar, was der Nullvektor in V/U ist.

ÜBUNG [01]:

Es sei $V := \mathbb{Q}^{5 \times 1}$. Der Unterraum U sei von den folgenden Vektoren erzeugt:

```
U:=[Vector([7,4,5,4,1]),Vector([6,3,3,3,0]),Vector([13,7,8,
7,1])];
```

$$U := \left[\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Ferner seien $v, w \in V$ die zwei folgenden Vektoren:

```
v:=Vector([-1,3,13,-5,8]);
w:=Vector([6,-10,-48,22,-30]);
```

$$v := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 13 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ -48 \\ 22 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Sind die Äquivalenzklassen der Vektoren v und w linear unabhängig als Elemente von V/U?

Hinweis: Der Befehl **IntersectionBasis** könnte hilfreich sein, eine Lösung zu finden, ist aber im Sinne einer Begründung für die Korrektheit der Lösung nicht ausreichend, da wir nicht wissen, wie Maple an dieser Stelle arbeitet.

MATH: Die **Dimension** eines Vektorraumes V ist definiert als die Anzahl der Elemente einer Basis. Falls dies eine natürliche Zahl (oder 0) ist, so heißt V **endlich dimensional**.

DENKANSTOSS: Warum ist die Dimension wohldefiniert?

ÜBUNG [02]:

1) Bestimme die Dimension des Vektorraumes U aus Aufgabe 2.
2) Bestimme die Dimension von V/U mit V und U aus Aufgabe 2.
Hinweis: Die Summe der beiden Dimensionen sollte 5 sein.
3) Gib eine Basis von V/U an.

Homomorphiesatz bei Mengen (Wiederholung)

Alle Konzepte, die wir früher für beliebige Abbildungen kennengelernt haben, wollen wir bei linearen Abbildungen von Vektorräumen wiederholen.

Folgendes ist aus früheren Worksheets wohlbekannt, wird aber zum Zwecke der Wiederholung hier nochmals gesagt:

MATH: ("Homomorphiesatz für Mengen") Sei $f: M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt:
1) Die Menge

$$F := \{f^{-1}(\{n\}) \mid n \in \text{Bild}(f)\}$$

der nichtleeren Fasern von f bildet eine Partition von M mit zugehöriger Äquivalenzrelation "Bildgleichheit unter f ".
2) Die Abbildung

$$f_1 : M \to F : m \mapsto f^{-1}(\{f(m)\})$$

ist eine surjektive Abbildung.
3) Die Abbildung

$$f_2 : F \to N : f^{-1}(\{f(m)\}) \mapsto f(m)$$

ist eine (wohldefinierte) injektive Abbildung.
4) Für die Komposition gilt

$$f = f_2 \circ f_1.$$

5) Genau dann ist f surjektiv, falls f ein Rechtinverses (mit dem Namen "Urbildvertreterwahl")

$$g : N \to M$$

hat, d. h. $f \circ g = \mathrm{Id}_N$. In diesem Fall ist f_2 bijektiv mit Inversem

$$f_2^{-1} = f_1 \circ g$$

DENKANSTOSS: Was bedeutet "wohldefiniert" in 3)? (Hinweis: Was passiert, wenn $f^{-1}(\{f(m)\}) = f^{-1}(\{f(m_1)\})$?)

DENKANSTOSS: Gehe 1) bis 4) mit folgendem Beispiel durch:
M sei eine Menge von Briefen, die von Aachen aus verschickt werden sollen,
N sei eine Menge von Städten, so dass jede Stadt auf einer der Anschriften in M vorkommt.
f sei die Abbildung, die jedem Brief seinem Bestimmungsort zuordnet.
Am Ende Ihrer Analyse sollten Sie eingesehen haben, daß es sich lohnt, die Briefe nach Städten zu ordnen, bevor man sie losschickt.

Homomorphiesatz bei Vektorräumen

MATH: ("Homomorphiesatz für Vektorräume")
Seien V, W Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi : V \to W$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt:
1) Die Menge

$$V/\mathrm{Kern}(\varphi) := \{\varphi^{-1}(\{n\}) \mid n \in \text{Bild}(\varphi)\}$$

der nichtleeren Fasern von φ bildet eine Partition von V mit zugehöriger Äquivalenzrelation "Bildgleichheit unter φ". Die Äquivalenzklassen können vertreterweise addiert und mit Körperelementen multipliziert werden, so daß sie einen **Vektorraum** über K bilden.

2) Die Abbildung

$$\varphi_1 : V \to V/\mathrm{Kern}(\varphi) \quad : v \mapsto \quad \varphi^{-1}(\{\varphi(v)\}) = v + \mathrm{Kern}(\varphi)$$

ist eine surjektive **lineare** Abbildung.

3) Die Abbildung

$$\varphi_2 : V/\mathrm{Kern}(\varphi) \to W : \varphi^{-1}(\{\varphi(v)\}) = v + \mathrm{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(v)$$

ist eine (wohldefinierte) injektive **lineare** Abbildung.

4) Für die Komposition gilt

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

5) Genau dann ist φ surjektiv, falls φ ein **lineares** Rechtinverses (mit dem Namen "Urbildvertreterwahl")

$$\psi : W \to V$$

hat, d. h. $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$. In diesem Fall ist φ_2 bijektiv mit Inversem

$$\varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ \psi$$

DENKANSTOSS: Die Inverse einer bijektiven linearen Abbildung ist wieder linear. Deshalb sprechen wir von Vektorraumisomorphismen. Insbesondere ist also der Faktorraum $V/\mathrm{Kern}(\varphi)$ immer isomorph zu Bild(φ) als Vektorraum.

Meta-ÜBUNG:

Verstehe den Homomorphiesatz für Vektorräume und erkläre alle folgenden Beispiele und Aufgaben damit. Mache dir insbesondere klar, was die fünf Punkte des Homomorphiesatzes bei dem jeweiligen Beispielen und Aufgaben besagen.

BEISPIEL:

Sei $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{Cauchy}$ $(\le \mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der rationalwertigen Cauchy-Folgen.

Offenbar ist

$$\lim : \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{Cauchy} \to \mathbb{R} : (c_i) \mapsto \lim_{i\to\infty} c_i$$

eine surjektive $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung. Der Kern von $\lim$ ist gegeben durch eine Menge N, welche in der nächsten Aufgabe bestimmt werden muss.

Die Fasern von $\lim$ bestehen aus den Folgen mit dem selben Grenzwert. Die Abbildungen

$$\lim_1 : \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{Cauchy} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{Cauchy}/N$$

und

$$\lim_2 : \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{Cauchy}/N \to \mathbb{R}$$

sind gegeben durch

$$\lim_1((c_i)) = (c_i) + N$$

und

$$\lim_2((c_i)+N)=\lim_{i\to\infty} c_i.$$

ÜBUNG [03]:

1) Was ist N, der Kern von lim?
2) Zeige, dass $\lim_2$ injektiv ist.

BEISPIEL: Es bezeichne $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, also $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$. Offenbar ist

$$A: C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 : f \mapsto (f(0), f(1), f(2))$$

eine $\mathbb{R}$-lineare surjektive Abbildung.

$$\text{Kern}(A) = \{ f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=f(1)=f(2)=0\}.$$

Die Fasern von A sind offenbar Restklassen nach diesem Kern und parametrisiert durch $\mathbb{R}^3$:

$$A^{-1}(\{(a,b,c)\}) = \{ f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=a, f(1)=b, f(2)=c\}.$$

ÜBUNG [04]:

1) Zeige die Linearität von A.
2)Zeige, eine lineare Rechtsinverse von A ist durch die Lagrange-Interpolation gegeben:

```
> La012:=proc(a::list)
    if nops(a)<>3 then ERROR("Liste mit 3 Werten erwartet!")
  end if;
>   return unapply((a[1]*(x-1)*(x-2)/2+a[2]*x*(x-2)/(-1)+a[3]
  *x*(x-1)/2),x);
> end proc:
```

BEISPIEL: Sei $A\in K^{n\times m}$. Dann induziert A bekanntlich eine lineare Abbildung gegeben durch

$$\varphi_A:\ K^{m\times 1}\to K^{n\times 1} : S\mapsto A\cdot S.$$

Die Bestimmung der Faser von φ_A über $b\in K^{n\times 1}$, bedeutet nichts anderes als das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$A\cdot S = b.$$

Ist dieses Gleichungssystem nicht lösbar, so ist die Faser leer.
Anderenfalls ist die Lösungsmenge eine Restklasse nach Kern(φ_A): Man benötigt eine partikuläre Lösung S_0 und bekommt dann als Lösungsmenge

$$S_0 + \text{Kern}(\varphi_A).$$

$\text{Kern}(\varphi_A)$ ist aber nichts anderes als die Lösungsmenge des **zugehörigen**

homogenen linearen Gleichungssystems, also von

$$A \cdot S = 0,$$

wobei 0 die Nullspalte in $K^{n \times 1}$ bezeichnet. Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus können wir sowohl ein S_0 als auch ein Erzeugendensystem des Teilraums $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ von $K^{m \times 1}$ ausrechnen.

Der Isomorphismus

$$K^{m \times 1} / \mathrm{Kern}(\varphi_A) \to \mathrm{Bild}\,(A):\ S_0 + \mathrm{Kern}(\varphi_A) \mapsto A \cdot S_0 =: b_0$$

ordnet jeder Restklasse nach dem Kern eine Spalte b_0 zu, so daß die Restklasse gerade die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit linker Seite A und rechter Seite b_0 ist.
Der Inverse dieses Isomorphismus ist somit die Zuordnung: rechte Seite $\mapsto$ Lösungsmenge.
Mit anderen Worten, das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit vorgegebener linker Seite A und variabler rechter Seite b_0 ist die Bestimmung eines Isomorphismus. Beachte, der Definitionsbereich dieses Isomorphismus ist Bild(A).

ÜBUNG [05]:

Erkläre den Homomorphiesatz noch einmal an dem Beispiel von linearen Gleichungssystemen

MATH: Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Ist $U \leq V$ ein Unterraum mit Basis $(u_1, \ldots, u_k)$, so lässt sich diese zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)$ von V ergänzen und dann ist $(v_1 + U, \ldots, v_l + U)$ eine Basis von V/U. Insbesondere gilt: $Dim(V/U) = Dim(V) - Dim(U)$.

Dies liefert uns für den Homomorphiesatz folgende Ergänzung:

MATH: Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung endlich erzeugter K-Vektorräume, so gilt: $Dim(Bild(\varphi)) + Dim(Kern(\varphi)) = Dim(V)$. (**DENKANSTOSS**: Warum?)

ÜBUNG [06]:

1) Es seien $U, W \leq V$ zwei Unterräume des endlich erzeugten K-Vektorraumes V. Zeige mithilfe des Homomorphiesatzes, dass gilt:
$U / (U \cap W) \cong (U + W) / W$
2) Folgere die Grassmannidentität:
$Dim(U + W) + Dim(U \cap W) = Dim(U) + Dim(W)$.

2.) Dreieckszahlen, Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

Aufgaben: 2

```
> restart;
```

Dreieckszahlen

Der Inhalt dieses Abschnittes ist in der Populärwissenschaft unter dem Stichwort "Hilberts Hotel" bekannt.

Erinnerung: Eine Folge ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen in eine vorgegebene Menge.

MATH: Eine interessante Folge ist die Folge der **Dreieckszahlen**, d.h. der Anzahlen der Einsen in folgenden Matrizen (bis ins Unendliche fortzusetzen!):

```
> map(n->Matrix(n,n,(i,j)->if i+j<n+2 then 1 else 0 end if),
  [$1..7]);
```

$$\left[\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right] \quad (2.1.1)$$

Mit anderen Worten ist die Folge der Dreieckszahlen gleich der Summen der natürlichen Zahlen von 1 bis *n*:

```
> a:=(n::posint)->sum(i,i=1..n);
```

$$a := n{::}posint \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i \quad (2.1.2)$$

```
> map(a, [$1..10]);
```

$$[1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55] \quad (2.1.3)$$

MATH: Der zehnjährige Carl Friedrich Gauß kannte diese Folge bereits, weil er erkannte, dass sie gleich der folgenden Folge ist:

```
> b:=(n::posint)->sum((n+1-i),i=1..n);
```

$$b := n{::}posint \rightarrow \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) \qquad (2.1.4)$$

```
> map(b, [$1..10]);
```

$$[1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55] \qquad (2.1.5)$$

Nun kann man $2 \cdot a = a + b$ berechnen,

```
> Sum(i,i=1..n)+Sum((n+1-i),i=1..n);
```

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) \qquad (2.1.6)$$

was aber gleich $n \cdot (n+1)$ ist. Also ist unsere Folge gegeben durch

```
> factor(expand(binomial(n+1,2)));
```

$$\frac{1}{2}\, n\,(n+1) \qquad (2.1.7)$$

```
> map(n->binomial(n+1,2), [$1..10]);
```

$$[1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55] \qquad (2.1.8)$$

MATH: Als Anwendung dieser Folge geben wir eine Abbildung $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (i, j) \mapsto \binom{i+j-1}{2} + i$ an (dies ist ein Binomialkoeffizent und kein Vektor). Später zeigen wir die Bijektivität dieser Abbildung.

```
> f:=(i::Or(posint,symbol),j::Or(posint,symbol))->binomial(i+
   j-1,2)+i;
```

$$f := (i{::}(\mathrm{Or}(posint, symbol)), j{::}(\mathrm{Or}(posint, symbol))) \rightarrow \mathrm{binomial}(i+j-1, 2) + i \qquad (2.1.9)$$

Hierbei ist z. B. die Einschränkung dieser Abbildung auf $\{1,.., 7\} \times \{1,.., 7\}$:

```
> A:=Matrix(7,7,(i,j)->f(i,j));
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \\ 6 & 9 & 13 & 18 & 24 & 31 & 39 \\ 10 & 14 & 19 & 25 & 32 & 40 & 49 \\ 15 & 20 & 26 & 33 & 41 & 50 & 60 \\ 21 & 27 & 34 & 42 & 51 & 61 & 72 \\ 28 & 35 & 43 & 52 & 62 & 73 & 85 \end{bmatrix} \qquad (2.1.10)$$

ÜBUNG [07]:

1) Erkläre den Zusammenhang zwischen der oben definierten Abbildung $f(i, 1)$ und den Dreieckszahlen ausgehend von dieser Matrix A.
2) Erkläre die Gleichung $f(i, j) = f(i+j-2, 1) + i$. Welcher Zusammenhang besteht zur obigen Matrix A? (Hinweis: Wir haben in Teil (1) gesehen, dass

$f(i+j-2,\, 1)$ eine Dreickszahl ist.)

```
> f(3,4),f(5,1)+3;
```

$$18,\ 18 \tag{2.1.11}$$

MATH: Da $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijektiv ist, können wir versuchen die Inverse zu bestimmen, also aus n das Urbild (i, j) berechnen:

```
> f(i,j)=n;
```

$$\mathrm{binomial}(i+j-1,\, 2)+i=n \tag{2.1.12}$$

```
> Matrix(7,7,(i,j)->i+j);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix} \tag{2.1.13}$$

Durch obige Matrix motiviert versuchen wir zuerst an die Summe $k := i+j$ und im Anschluß an die Werte von i bzw. j zu kommen. Hierzu lösen wir die obige Gleichung für $i=1$ und j beliebig nach k auf:

```
> solve(expand(binomial(k-1,2))+1=n,k);
```

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7+8\,n},\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7+8\,n} \tag{2.1.14}$$

Da im Allgemeinen nur die erste Lösung positive Zahlen produziert, ist nur diese für uns relevant.

```
> k:=n->(3/2+(1/2)*sqrt(-7+8*n));
  map(k,[$1..16]);
```

$$k := n \to \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7+8\,n}$$

$$\left[2,\ 3,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17},\ 4,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{41},\ 5,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{57},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{65},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{73},\ 6,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{89},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{97},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{105},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{113},\ 7\right] \tag{2.1.15}$$

Jetzt bezahlen wir dafür, dass wir $i=1$ angenommen haben, denn unsere Lösung ist nicht immer ganzzahlig. Wir beheben dies durch die untere Gaußklammer (Maple: floor):

```
> k:=n->floor(3/2+(1/2)*sqrt(-7+8*n));
  map(k,[$1..16]);
```

$$k := n \to \operatorname{floor}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7+8\,n}\right)$$

$$[2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7] \tag{2.1.16}$$

Nun können wir leicht nach i auflösen, was als Differenz von n und dem Binomialkoeffizienten gegeben ist:

$$i = n - \binom{k(n)-1}{2}$$

ebenso einfach erhalten wir nun aus k und i den letzten Wert, also j:

$$j = k - i = k(n) - \left(n - \binom{k(n)-1}{2}\right)$$

Also ist die Inverse Fi der Funktion f gegeben durch die folgende Funktion:

$Fi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \mapsto \left(n - \binom{k(n)-1}{2},\ k(n) - \left(n - \binom{k(n)-1}{2}\right)\right)$, mit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \left\lfloor \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(8 \cdot n - 7)} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die untere Gaußklammer von x, also die größte kleinere ganze Zahl.

```
> Fi:=proc(n::posint)
    local k,i,j;
    k:=floor(3/2+1/2*(-7+8*n)^(1/2));
    i:=n-binomial(k-1,2);
    j:=k-i;
    return [i,j];
  end proc:
> map(Fi, [$1..20]);;
```

$$[[1, 1], [1, 2], [2, 1], [1, 3], [2, 2], [3, 1], [1, 4], [2, 3], [3, 2], [4, 1], [1, 5], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1], [1, 6], [2, 5], [3, 4], [4, 3], [5, 2]] \tag{2.1.17}$$

MATH: Anwendung: Die Menge der rationalen Zahlen ist **abzählbar** (oder abzählbar unendlich), d. h., es gibt eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$, der Menge der natürlichen Zahlen, auf $\mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen. Wir beschränken uns auf die positiven rationalen Zahlen. Wir geben auch keine genaue Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge der positiven rationalen Zahlen an, sondern nur eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf diese Menge. (Warum genügt das?)

```
> FiQ:=proc(n::posint)
    local l;
    l:=Fi(n);
    return op(l)[1]/op(l)[2];
  end proc:
```

(**FiQ** für "**f** invers nach $\mathbb{Q}$")

```
> map(FiQ,[$1..30]);
```

$$\left[1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 1, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \right. \tag{2.1.18}$$

$\frac{3}{5}, 1, \frac{5}{3}, 3, 7, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}]$

ÜBUNG [08]:

1) Zeige, dass jede Faser der Abbildung **FiQ** unendlich ist.
2) Begründe die (obige) Aussage: Die Existenz einer surjektiven Abbildung von $\mathbb{N}$ auf diese Menge $\mathbb{Q}_{>0}$ der positiven rationalen Zahlen impliziert, dass $\mathbb{Q}_{>0}$ abzählbar ist.
Hinweis: Zeige, dass jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.
3) Programmiere eine bijektive Funktion in Maple, welche nachweist, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist. (Hinweis: $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ bijektiv oder $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv angeben)
4) Beweise, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist. (Hinweis: Benutze Aufgabenteile 2 und 3.)