1.) Endomorphismen, Eigenwerte

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

Projektionen

Projektionen sind eine wichtige Klasse von Endomorphismen von Vektorräumen. Sie stehen in Bijektion zu Zerlegungen eines Vektorraumes in eine direkte Summe. Wir werden bei der Zerlegung eines Vektorraumes in Haupträume/Eigenräume auf die Projektionen zurückgreifen.

MATH: Seien V, W Vektorräume über dem Körper K. Die Paarmenge $V\times W$ wird zu einem K-Vektorraum durch die Setzung

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$k\cdot(v, w) := (k\cdot v, k\cdot w)$$

für alle $k \in K, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$.
Dieser neue Vektorraum über K heißt die **(äußere) direkte Summe** von V und W und wird mit $V\oplus W$ bezeichnet. Wir richten unser Augenmerk auf die folgenden beiden Endomorphismen (= lineare Abbildungen eines Vektorraums in sich) von $V\oplus W$:

$$e_V: V\oplus W \to V\oplus W: (v, w) \mapsto (v, 0)$$

und

$$e_W: V\oplus W \to V\oplus W: (v, w) \mapsto (0, w)$$

MATH: Ein Endomorphismus π eines K-Vektorraumes U heißt **idempotent** oder **Projektion**, falls

$$\pi^2 = \pi$$

gilt. In diesem Fall haben wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{U} \to \mathrm{Kern}(\pi) \oplus \mathit{Bild}(\pi) : u \mapsto (u-\pi(u), \pi(u))$$

und

$$Id_U - \pi$$

ist auch eine Projektion von U. Sie erfüllt

$$\pi \circ (Id_U - \pi) = (Id_U - \pi) \circ \pi = 0$$

Klar: e_V, e_W sind Projektionen mit

$$e_V + e_W = Id_{V\oplus W}.$$

MATH: Ein K-Vektorraum U heißt **(innere) direkte Summe** der beiden Teilräume $V, W \le U$, falls die äußere direkte Summe $V\oplus W$ vermöge

$$V\oplus W \to U: (v, w) \mapsto v + w$$

isomorph zu U ist. In diesem Fall schreiben wir :

$$U = V\oplus W.$$

Mit anderen Worten:

$U = V + W \ \wedge V \cap W = \{0\}$.

Mit Hilfe der inneren direkten Summe wird also ein "großer" Vektorraum in kleinere Vektorräume zerlegt. Oft kann damit ein "großes Problem" in "kleinere Probleme" zerlegt werden.
DENKANSTOSS: Verallgemeinere die vorherigen Definitionen auf Summen endlich vieler Räume.

DENKANSTOSS: Die äußere direkte Summe ist eine Konstruktion. Die innere direkte Summe ist das Ergebnis einer Analyse, die gezeigt hat, dass nach geeigneter Identifikation die Situation der Konstruktion vorliegt.

MATH: Sei nun $\pi : U \rightarrow U$ eine Projektion. Wählt man nun eine an

$$\mathrm{U} = \mathrm{Kern}(\pi) \oplus \mathrm{Bild}(\pi)$$

angepasste Basis von U, die also durch das Anhängen einer Basis von $\mathrm{Bild}\,\pi$ an eine Basis von $Kern\,\pi$ zustande kommt, so hat die Matrix von π bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt mit 0-en und 1-en auf der Diagonalen.

BEISPIEL: $\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\pi)) = 2,\ \mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\pi)) = 3$: Matrix von π:

```
> DiagonalMatrix([0*IdentityMatrix(2),IdentityMatrix(3)]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

MATH: Gibt man nur einen Teilraum $V \leq U$ vor, so hat man in der Regel viele Teilräume $W \leq U$ mit

$U = V \oplus W$.

Jeden dieser Teilräume W nennt man **Komplement** von V in U.
Addiert man nämlich auf die Vektoren einer Basis von W beliebige Elemente von V, so bekommt die Basis eines Teilraumes $W' \leq U$ mit

$U = V \oplus W'$,

also ein neues Komplement.

DENKANSTOSS: Alle Komplemente von V in U können auf diese Art erhalten werden.

ÜBUNG [01]:

1) Formuliere und beweise eine formelle Aussage, welche Folgendes präzisiert:
"Die Beschreibung eines Vektorraums U als direkte Summe ist äquivalent zur Angabe zweier idempotenter Endomorphismen von U."

2) Sei U ein K-Vektorraum und $V \leq U$ ein Teilraum. Zeige, dass das Komplement von V in U genau dann eindeutig ist, wenn V bereits der ganze Raum oder lediglich $\{0\}$ ist. (Beachte: Der Körper K ist beliebig!)
3) Zeige, dass die Spalten der nachfolgenden Matrix $A \in K^{3 \times 3}$ eine Basis von $U := K^{3 \times 1}$ bilden und folgere, dass U die direkte Summe der beiden Teilräume ist, die von den ersten beiden bzw. von der letzten Spalte von A erzeugt werden. (Beachte: Der Körper K ist beliebig!)
4) Gib die Matrizen der beiden zugehörigen Projektionen bezüglich der Standardbasis von U an.

5) Zerlege die Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ in ihre Komponenten bezüglich der Zerlegung.
6)
Gib alle Komplemente von

$$V := \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

in $K^{3 \times 1}$ auf folgende zwei Arten an: (a) durch eine Basis und (b) durch die Matrix der Projektion auf V bezüglich der Standardbasis.

```
A:=Matrix([[ 1 , 1 , 1 ],
           [ 1 , 0 , 1 ],
           [ 0 , 1 , 1 ]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATH: Eine Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$ heißt **verträglich** mit einem Endomorphismus $\varphi : V \to V$, wenn gilt:

$$\varphi(V_i) \subseteq V_i \text{ für } i = 1, 2.$$

Wählt man Basen B_i von V_i, so ist $B := (B_1, B_2)$ eine Basis von V und ${}^{B}\varphi^{B}$ hat Blockdiagonalgestalt.

Wir wollen diesen Fall von Projektionen auf allgemeinere Endomorphismen und Zerlegungen verallgemeinern. Den ersten Schritt hierbei bilden die Eigenräume.

Eigenwerte & -vektoren

Wir wollen die Situation aus dem vorherigem Abschnitt, in welcher wir eine

Matrix durch Basiswechsel in Diagonalform überführen konnten, verallgemeinern. Dies führt uns zu folgender Definition:

MATH: Sei V ein K-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V. Ein **Eigenvektor** von φ ist ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\varphi(v) = a \cdot v$ für ein $a \in K$. Ein Element $a \in K$ heißt **Eigenwert** von φ, wenn es einen Eigenvektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = a \cdot v$ gibt. Sei $a \in K$ ein Eigenwert von φ, dann heißt $E_a(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = a \cdot v\} = \{v \in V \mid v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } a \text{ oder der Nullvektor}\}$ der **Eigenraum** zu a.

DENKANSTOSS: $E_a(\varphi)$ ist ein Unterraum von V.

MATH: Ein Endomorphismus φ des K-Vektorraumes V heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $B \in V^n$ gibt, so dass $\forall\ i \in \{1,.., n\} : B_i$ ist Eigenvektor von φ.

DENKANSTOSS: Übersetze die letzte Definition in die Sprache der Matrizen.

Im Folgenden geben wir eine lineare Abbildung einfach durch ihre Matrix bezüglich irgendeiner Basis B von V an, ohne B, V oder die lineare Abbildung zu erwähnen. Man muss nur wissen, welches der Körper ist. Sofern nicht anders erwähnt, wird dies $\mathbb{Q}$ sein. Durch unser Verständnis des letzten Worksheets ist uns klar, dass die bisher definierten Begriffe wie z.B. Eigenvektor und die noch folgenden Begriffe unabhängig von der Wahl einer Basis sind. (**DENKANSTOSS**: Sollte dies nicht der Fall sein, so mache es dir erneut klar.)

BEISPIEL: Projektion

```
> A:=Matrix(3,3,1/3);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

```
> Equal(A, A.A);
```

$$true \quad (1.2.2)$$

Wir haben im Abschnitt über Projektionen gesehen, dass V die direkte Summe von Kern und Bild ist und eine Basis von beiden zusammengenommen eine Eigenvektorbasis (mit Eigenwerten 0 für den Kern und 1 für das Bild) ergibt:

```
> T:=Eigenvectors(A);
```

$$T := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

Die Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ von **T[2]** erzeugt das Bild und die beiden anderen Spalten den Kern.
Entsprechend stehen in **T[1]** die Eigenwerte. Transformieren wir A mit **T[2]**, so erhalten wir die gewünschte Diagonalgestalt:

```
> T[2]^(-1).A.T[2];
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

Weiterhin ist $I_3 - A$ auch eine Projektion:

```
> 1-A,(1-A)^2;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

A und $I_3 - A$ sind also gleichzeitig die Projektionen auf die Eigenräume.

ÜBUNG [02]:

1) Angenommen es sind nur die Eigenwerte

```
> T[1];
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

bekannt. Bestimme die Eigenvektoren **T[2]** ohne Benutzung des **Eigenvectors**-Befehls noch einmal.
2) Was sind die Eigenwerte von $42 \cdot A + 23 \cdot (I_3 - A)$?
3) Warum muss man bei Teilaufgabe 2) nicht neu rechnen?
4) Liefert **T[2]** auch dafür die Eigenvektorbasis von $42 \cdot A + 23 \cdot (I_3 - A)$?
5) Verallgemeinere: Ist $p(x) \in K[x]$ ein Polynom, φ ein Endomorphismus von V, so ist $p(\varphi)$ wieder ein Endomorphismus von V und für jeden Eigenwert a von φ ist $p(a)$ Eigenwert von $p(\varphi)$.

Ist ein Eigenwert $a \in K$ eines Endomorphismus φ von V bekannt, so kann man

den zugehörigen Eigenraum $E_a(\varphi)$ leicht bestimmen: $E_a(\varphi) = Kern(\varphi - a \cdot Id_V)$.
(**DENKANSTOSS**: Warum?)

BEISPIEL: Sei $M \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ die folgende Matrix:

```
> M:=Matrix([[1/2,9/4,-15/4],[1/3,3/2,1/2],[2/3,-1,4]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

Wir wollen die Eigenwerte und Eigenräume von M ohne den Befehl Eigenvectors bestimmen. Wir hoffen zuerst auf einen nicht-trivialen Kern:

```
> NullSpace(M);
```

$$\{\,\} \quad (1.2.8)$$

Leider Pech gehabt. Testen wir nun $a = 1$:

```
> NullSpace(M-1);
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.2.9)$$

Wie sieht die Situation bei -1 aus?

```
> NullSpace(M-(-1));
```

$$\{\,\} \quad (1.2.10)$$

Wir testen weitere Zahlen:

```
> map(i->NullSpace(M-i),[2,-2,3,-3,4,-4]);
```

$$\left[\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \{\,\}, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \{\,\}, \{\,\}, \{\,\} \right] \quad (1.2.11)$$

Wir haben also die weiteren Eigenwerte 2 und 3. Sind dies alle?

```
> Matrix(map(i->op(NullSpace(M-i)),[1,2,3]));
  Rank(%);
```

$$\begin{bmatrix} -3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad (1.2.12)$$

Wir erkennen, dass die drei Erzeuger der Eigenräume eine Basis von

$\mathbb{Q}^{3\times 1}$ bilden und es damit aufgrund der Linearität keine weiteren Eigenwerte mehr geben kann. (**DENKANSTOSS**: Führe dies aus. Warum war klar, dass die drei Vektoren eine Basis bilden?)

ÜBUNG [03]:

1) Bestimme eine Basis aus Eigenvektoren für die folgende Matrix $B \in \mathbb{F}_{13}^{4\times 4}$:

```
> B:=Matrix([[7,5,7,10],[3,6,3,3],[6,10,11,5],[11,4,2,2]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 7 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & 11 & 5 \\ 11 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.2.13}$$

Hinweis: Für die Bestimmung von Kernen in $\mathbb{F}_{13}$ kann das folgende Programm verwendet werden.

```
> Kern_in_F13:=proc(M::Matrix)
  return map(i->map(GF(13,1):-ConvertOut,i),LinearAlgebra
  [Generic][NullSpace][GF(13,1)](map(GF(13,1):-ConvertIn,M)))
  ;
  end proc:
```

ÜBUNG [04]:

Wir betrachten den Vektorraum V der Polynome in einer Variablen x mit reellen Koeffizienten und die beiden Endomorphismen d und m von V, wobei d die Ableitung ist und m die Multiplikation mit dem linearen Polynom x. Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von...

1) ... d?

2) ... $m \circ d$?