Diagonalisierbarkeit und Jordannormalform

```
> restart; with(LinearAlgebra):
```

Wiederholung: Charakteristisches Polynom, Diagonalisierbarkeit

MATH: Wir erinnern uns: lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über einem Körper K werden durch darstellende Matrizen (eindeutig für eine feste Wahl der Basen) beschrieben. Endomorphismen entsprechen dann quadratischen Matrizen.

Für eine quadratische Matrix A mit n Zeilen und Spalten ist das charakteristische Polynom definiert als das Polynom $det(t\,I - A)$ in t, wobei I die Identitätsmatrix gleicher Größe ist. Wir sehen, dass das charakteristische Polynom Grad n hat. (Warum?) Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass A in sein eigenes charakteristisches Polynom eingesetzt 0 ergibt.
In Maple kann das charakteristische Polynom so berechnet werden:

```
> A:=Matrix([[1,2,3],[2,1,2],[3,2,1]]);
  CharacteristicPolynomial(A,t);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t^3 - 3\,t^2 - 14\,t - 8 \tag{1.1.1}$$

Für ein Element λ des Körpers K definieren wir zudem die algebraische Vielfachheit $alg(A, \lambda)$ als die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom und die geometrische Vielfachheit $geo(A, \lambda)$ als die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $(A - \lambda\, I)$. (Wie hängen diese Defintionen vom Körper K ab?) Es gilt stets $geo(A, \lambda) \leq alg(A, \lambda)$.

Zwei Matrizen A und B heißen ähnlich oder konjugiert, wenn es eine invertierbare Matrix Q gibt, so dass $QAQ^{-1} = B$. Eine Matrix heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper haben wir (u.a.) folgende Equivalenzen: A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ K^n hat eine Basis aus Eigenvektoren von $A \Leftrightarrow geo(A, \lambda) = alg(A, \lambda)$ für jedes Element λ des Körpers K.

ÜBUNG [01]:

Sei nun $K = \mathbb{C}$ und

```
> A1:=Matrix(5, 5, {(1, 1) = 1, (1, 2) = -1, (1, 3) = 1, (1,
  4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 13, (2, 2) = -3, (2, 3) = 1,
```

```
(2, 4) = 0, (2, 5) = 1, (3, 1) = 12, (3, 2) = -6, (3, 3) =
4, (3, 4) = 0, (3, 5) = 1, (4, 1) = 10, (4, 2) = -5, (4, 3)
= 3, (4, 4) = -1, (4, 5) = 2, (5, 1) = 66, (5, 2) = -6, (5,
3) = -10, (5, 4) = 0, (5, 5) = 6});
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & -6 & 4 & 0 & 1 \\ 10 & -5 & 3 & -1 & 2 \\ 66 & -6 & -10 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

a) Erkläre, warum für jede Matrix A und jedes $\lambda \in K$, $alg(A, \lambda) > 0 \Leftrightarrow geo(A, \lambda) > 0$.
b) Berechne das charakteristische Polynom von $A1$ und alle geometrischen und algebraischen Vielfachheiten, die nicht 0 sind.
c) Verifiziere den Satz von Cayley-Hamilton für $A1$.
d) Entscheide, ob $A1$ diagonalisierbar ist.

ÜBUNG [02]:

Sei wieder $K = \mathbb{C}$ und

```
> A2:=Matrix(5, 5, [[15, -85, 225, -274, 120], [1, 0, 0, 0,
  0], [0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0]]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 15 & -85 & 225 & -274 & 120 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

a) Wiederhole die Berechnungen aus [01] und entscheide, ob $A2$ diagonalisierbar ist.
b) Beweise allgemein: Wenn das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix n verschieden Nullstellen hat, dann ist die Matrix diagonalisierbar.
c) Gilt die Umkehrung von b)? Beweise das oder gib ein Gegenbeispiel.
d) Finde eine 2x2-Matrix, die nicht invertierbar ist.

Direkte Summen und invariante Teilräume

MATH: Wir gehen aus von n Vektorräumen V_i, $i = 1, \ldots, n$ mit Endomorphismen

$$\varphi_i : V_i \to V_i$$

und setzen diese zusammen zu einem Endomorphismus φ der direkten Summe

$$V := V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$$

durch

$$\varphi : V \to V: (v_1,..., v_n) \mapsto (\varphi_1(v_1),\ldots, \varphi_n(v_n))$$

ÜBUNG [03]:

Sei in der obigen Situation $n := 3$ und

$$b \in V_1^2,\ c \in V_2^3,\ d \in V_3^4$$

Basen der V_i und die Endomorphismen bezüglich dieser Basen beschrieben durch

```
> BL_A3:=map(i->CompanionMatrix(x^i-x^(i-1)+2,x),[2,3,4]);;
```

$$BL\_A3 := \left[\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right] \quad (1.2.1)$$

Gib eine Basis der direkten Summe $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ an, so dass die Matrix des zusammengesetzten Endomorphismus die folgende, sich aufdrängende Gestalt

```
> A3:=DiagonalMatrix(BL_A3);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

hat.

Das Ziel dieses Abschnittes soll es jedoch nicht sein, Vektorräume aus kleineren (d.h. solchen kleinerer Dimension) zusammenzusetzen, denn wie in der Aufgabe gesehen ist dies eine sehr simple Konstruktion. Statt dessen wollen wir einen gegebenen Vektorraum in kleinere Teilräume zerlegen. Dies soll allerdings nicht willkürlich erfolgen, sondern die Teilräume V_i sollen mit einem vorgegebenen Endomorphismus φ des Vektorraumes verträglich sein, d.h.

$$\varphi(V_i) \subseteq V_i.$$

Man spricht davon, dass V_i **invariant** unter φ ist.

Ein Vektorraum und ein φ, welche wie oben angegeben zusammengesetzt

wurden, erfüllen diese Bedingung für die Zerlegung trivialerweise. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Zerlegung des Vektorraumes in Eigenräume zu dem gegebenen Endomorphismus; denn Eigenräume von φ sind offenbar invariant unter φ.
Im Allgemeinen lassen sich für Endomorphismen aber keine Eigenvektorbasen angeben. Gesucht ist trotzdem eine Möglichkeit, möglichst kleine invariante Teilräume zu finden. Die sogenannten Haupträume sind ein erster Schritt in diese Richtung.
In die Sprache der Matrizen übersetzt heißt dies, dass eine Basis gesucht ist, unter der die Matrix möglichst diagonal ist (was auch immer das heißen mag). Als wichtigste Hilfsmittel hierfür stehen uns (weitestgehend äquivalent) das Minimalpolynom oder das charakteristische Polynom zur Verfügung.

MATH: Zu diesem Zweck brauchen wir eine strukturelle Idee, um an die Zerlegung zu kommen. Als Vorbereitung nochmals zurück zum obigen Fall: Die drei Räume, aus denen wir die direkte Summe gebildet haben, finden wir als Teilräume der direkten Summe wieder, nämlich als Bilder der folgenden drei Projektionen:

```
> DiagonalMatrix([IdentityMatrix(2),0*IdentityMatrix(3),0*
  IdentityMatrix(4)]),
  DiagonalMatrix([0*IdentityMatrix(2),IdentityMatrix(3),0*
  IdentityMatrix(4)]),
  DiagonalMatrix([0*IdentityMatrix(2),0*IdentityMatrix(3),
  IdentityMatrix(4)]);
```

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir halten fest, dass das Quadrat jedes dieser drei Endomorphismen (gegeben durch die Matrizen) wieder gleich dem Endomorphismus ist: Wir sprechen von idempotenten Endomorphismen oder Projektionen.

MATH: Wir erinnern uns: Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom, welches ein Teiler von

$$x^2 - x$$ ist, d.h. $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist erfüllt.

Dann nennt man φ **Projektion** oder **idempotent**. Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als

$$v = u + c$$

mit

$$u \in \mathrm{Kern}(\varphi) \text{ und } c \in \mathrm{Bild}(\varphi)$$

darstellen.

MATH: Die zweite Eigenschaft unserer drei Idemponente ist, dass das Produkt von je zwei verschiedenen Null ist, mit anderen Worten, das Bild eines jeden ist im Kern eines jeden anderen enthalten. Die dritte Eigenschaft ist diese: Die Summe aller drei Idempotente ist gleich der Identität. Wenn alle drei Eigenschaften erfüllt sind, spricht man von einer Zerlegung der Eins (oder der Identität) in orthogonale Idempotente (oder Projektionen).

ÜBUNG [04]:

Zeige: Ist $\pi \in \mathrm{End}(V)^k$ eine Zerlegung der Identität in k orthogonale Projektionen, so lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig als

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

mit

$$v_i \in \text{Bild } \pi_i$$

für $i = 1, \ldots, k$ schreiben.

Haupträume und Jordannormalform

MATH: Für einen Endomorphismus f des Vektorraums K^n $(n \geq 1)$ und ein Element

$\lambda \in K$ definieren wir den Hauptraum $\underline{Hau(f, \lambda)}$ als die Vereinigung der Kerne $ker((f-\lambda Id)^m)$ für alle $m \geq 1$, wobei Id die Identitätsabbildung ist. Der Hauptraum enthält per definitionem den Eigenraum zum Eigenwert λ, tatsächlich ist der Hauptraum genau dann nicht 0, wenn λ ein Eigenwert ist.

Wenn nun K ein algebraisch abgeschlossener Körper (wie $\mathbb{C}$) ist, so zerfällt K^n in eine direkte Summe der Haupträume von f. Zudem hat jeder Hauptraum eine Basis $v_1,\ldots, v_t$ (wobei t die Dimension des Hauptraums ist), so dass $(f-\lambda Id)v_i = 0$ oder $(f-\lambda Id)v_i = v_{i-1}$ für alle i. Die darstellende Matrix von f bezüglich dieser Basis hat dann die Konstante λ entlang der gesamten Diagonalen und die Werte 0 oder 1 auf der ersten oberen Nebendiagonalen, während alle anderen Einträge 0 sind. (Warum?)

Eine Matrix hat die Jordannormalform, wenn sie eine Blockdiagonalmatrix ist, so dass jeder Block einen konstanten Wert entlang der Diagonalen und den festen Wert 1 entlang der ersten oberen Nebendiagonalen hat. Die Blöcke heißen dann Jordanblöcke.

ÜBUNG [05]:

a) Erkläre, wie nun eine Basis von K^n gefunden werden kann, so dass die darstellende Matrix von f die Jordannormalform hat.
b) Beweise, dass jeder Hauptraum ein invarianter Unterraum bezüglich f ist.
c) Gib drei verschiedene Beispiele von 4×4-Matrizen in Jordannormalform.
d) Was kann über die Größen der Jordanblöcke für den Endomorphismus von $\mathbb{C}^5$, der durch die Matrix $A1$ aus [01] beschrieben wird, gesagt werden?
e) Was kann über die Jordannormalform eines nilpotenten Endomorphismus gesagt werden, also einen Endomorphismus f, für den es eine Zahl $k \geq 1$ gibt so dass $f^k = 0$?